Analyse de Fourier

I. Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

I.1. Théorème de Fourier

Soit $s : t \to s(t)$ une fonction réelle T-périodique. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$. Sous des conditions mathématiques peu restrictives (cf programme de 2è année), on peut alors écrire $s(t)$ sous la forme d'un développement en *série de Fourier* (DSF)

$$\boxed{s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]}$$

où la **valeur moyenne** du signal $s(t)$ est représentée par le coefficient

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \mathrm{d}t = < s(t) >_T$$

et a_n et b_n sont les coefficients des *harmoniques de rang n*, donnés par[1]

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) \mathrm{d}t \;.$$

L'harmonique de rang $n = 1$ est appelée *le (mode) fondamental*.
En bref : une fonction s de période T peut s'écrire comme une somme finie ou infinie de fonctions sinusoïdales plus une constante.

I.2. Autres écritures de la décomposition en série de Fourier

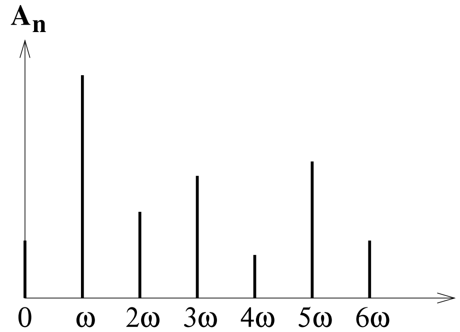
$$\boxed{s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)} \quad \text{avec} \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \;, \text{ et } \quad \tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, \mathrm{e}^{in\omega t}} \quad \text{avec} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \, \mathrm{e}^{-in\omega t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(a_n - i b_n)$$

1. Ces relations ne sont pas à connaître cette année.

I.3. Propriétés

- Les intégrales précédentes peuvent être calculées sur un intervalle $[t_0, t_0 + T]$ avec t_0 quelconque.
- Si la fonction s est paire : $\boxed{b_n = 0}$.
- Si la fonction s est impaire : $\boxed{a_0 = 0}$ et $\boxed{a_n = 0}$.
- Le *spectre* de la fonction s est le diagramme donnant l'amplitude des différentes harmoniques A_n en fonction de la pulsation $n\omega$ (ou fréquence nf avec $\omega = 2\pi f$).
  Le spectre permet donc de visualiser l'importance relative des différentes harmoniques.
  Remarque : on montre facilement que nécessairement $A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ si la fonction est développable en série de Fourier.



I.4. Exemples

- Un signal triangle symétrique impair[2], de pulsation ω et d'amplitude E_0 a pour DSF :

$$u_e(t) = \frac{8E_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin[(2n+1)\omega t]}{(2n+1)^2}$$

- Un signal créneau symétrique impair[3], de pulsation ω et d'amplitude E_0 a pour DSF :

$$u_e(t) = \frac{4E_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\omega t]}{2n+1}$$

I.5. Energie et valeur efficace

L'énergie portée par le signal $s(t)$ (ou sa puissance...) est en général une grandeur qui en dépend quadratiquement : $\mathcal{E}(t) = K \, s^2(t)$ où K est une constante.

2. La forme paire s'obtient en remplaçant t par $t \pm T/4$, ce qui remplace $\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \ldots$ par $\frac{\mp 1}{(2n+1)^2} \cos \ldots$.
3. De même on obtient la forme paire en translatant : $t \to t \pm T/4$, ce qui remplace $\frac{1}{2n+1} \sin \ldots$ par $\frac{\mp(-1)^n}{2n+1} \cos \ldots$.

En régime périodique on s'intéresse souvent à l'énergie moyenne sur une période $<\mathcal{E}>_T$, qui est associée à la *valeur efficace* S_{eff} de $s(t)$ par

$$\boxed{<\mathcal{E}>=\frac{1}{T}\int_0^T K\,s^2(t)\,\mathrm{d}t = K\,S_{\text{eff}}^2 \quad \text{avec} \quad S_{\text{eff}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,\mathrm{d}t}}\,.$$

Nous avons montré au début de l'année **les moyennes quadratiques de deux signaux asynchrones s'additionnent** lorsqu'on fait la somme des signaux [4] :

$$<(s_1+s_2)^2>=<s_1^2>+<s_2^2>$$

On en déduit le théorème suivant [5] très intuitif :

> THÉORÈME : Le carré de la valeur efficace de $s(t)$ est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses composantes spectrales (valeur moyenne, fondamental et harmoniques).
>
> $$S_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^2}{2}$$
>
> **Point-de-vue énergétique : l'énergie moyenne est la somme des énergies moyennes de toutes les composantes spectrales.**

I.6. Cas particulier important : produit de deux fonctions périodiques

a. Signaux sinusoïdaux

Le produit de deux fonctions sinusoïdales peut être ré-écrit comme une somme de fonctions sinusoïdales (on suppose $\omega_1>\omega_2$) :

$$\begin{aligned}\cos(\omega_1 t+\varphi_1).\cos(\omega_2 t+\varphi_2) &= \tfrac{1}{2}\cos\left((\omega_1-\omega_2)t+\varphi_1-\varphi_2\right)+\\ &\quad \tfrac{1}{2}\cos\left((\omega_1+\omega_2)t+\varphi_1+\varphi_2\right)\end{aligned}$$

En toute rigueur, cette fonction n'est a priori pas périodique, sauf si $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ est un nombre rationnel. Toutefois cette restriction est peu contraignante en physique car toute mesure s'exprime par un nombre décimal. En pratique donc le rapport de deux pulsations (ou périodes) sera toujours rationnel : $\frac{T_2}{T_1}=\frac{p}{q}$. Et on pourra toujours identifier une période T dans le signal, définie par : $T=pT_1=qT_2$. On peut donc tout de même interpréter la décomposition ci-dessus comme un DSF, ou un *spectre de raie* :

> Le produit de deux fonctions sinusoïdales de pulsations ω_1 et ω_2 comprend deux composantes spectrales de pulsations $|\omega_1-\omega_2|$ et $\omega_1+\omega_2$.

b. Signaux périodiques

Généralisons à deux fonctions périodiques s_1 et s_2 respectivement de périodes T_1 et T_2 ($T_2>T_1$). Le produit $s_1.s_2$ n'est a priori pas périodique si $T_1\neq T_2$, sauf si $\frac{T_1}{T_2}$ est un nombre rationnel... même remarque. On peut donc obtenir le spectre de $s_1.s_2$ simplement en multipliant les DSF terme à terme, ce qui est rigoureux mathématiquement lorsque l'une des fonctions a un DSF avec un nombre fini de terme. Toutefois, en physique expérimentale la limite en précision des appareils de mesure conduit naturellement à tronquer les DSF et ne retenir qu'un nombre fini d'harmoniques. D'après la propriété ci-dessus, on obtiendra donc un spectre de raies :

> Le produit de deux fonctions périodiques de périodes T_1 et T_2 a un spectre comprenant l'ensemble des composantes de fréquences construites par combinaisons linéaires entières de f_1 et f_2 (restreintes aux valeurs positives) :
>
> $$\{\,|nf_1+mf_2|\,\} \quad \text{avec} \quad (n,m)\in\mathbb{Z}^2$$

c. Exemples

- $\cos^2(\omega t)=\frac{1}{2}(1+\cos(2\omega t))$ est un signal $\frac{T}{2}$-périodique comprenant une composante continue et une seule harmonique, le fondamental (de pulsation 2ω).
- $\cos^n(\omega t)$ a un spectre comprenant l'ensemble des composantes de fréquences : $\{0,f,2f,\ldots,nf\}$. C'est biensûr aussi le cas de $\sin^n(\omega t)$ et $\cos^k(\omega t)*\sin^{n-k}(\omega t)$

d. Non-linéarité d'un système - distorsion

Par simplicité, considérons un système qui répond à un signal d'entrée $e(t)$ par un signal de sortie $s(t)$ via une relation non différentielle (une équation différentielle d'ordre 0). Si le système est *linéaire*, on a donc deux constantes a et b telles que

$$s(t)=a+b\,e(t)\,.$$

Dans de nombreux contextes, le système qu'on souhaite linéaire ne l'est cependant pas parfaitement. Par exemple ceci arrive souvent lorsqu'on augmente l'amplitude

4. Deux signaux asynchrones n'interfèrent pas.

5. Théorème de Parceval. Les conditions de validité sont la plupart du temps vérifiées en physique (sommabilité de la série Σa_n^2).

des signaux utilisés (existence de saturations, approximation linéaire non valable dans un développement limité...). Il arrive aussi que cette non-linéarité soit une propriété que l'on recherche. On a alors une réponse qui s'écrit plutôt :

$$s(t) = a + b\,e(t) + c\,e^2(t) + d\,e^3(t) + \dots$$

D'après les exemples précédents, on comprend que si l'entrée $e(t)$ est sinusoïdale de pulsation ω, alors la sortie ne le sera pas car elle comprendra, en plus d'un harmonique de pulsation ω, des harmoniques de rang supérieur en 2ω, 3ω etc. A fortiori, avec une entrée non sinusoïdale périodique, on obtiendra des multiples entiers des harmoniques présents dans $e(t)$.

Conclusion : A la traversée d'un système non-linéaire, un signal voit son spectre enrichit.

Pour quantifier cet enrichissement spectral, on analyse le spectre de la réponse à une entrée sinusoïdale $e(t) = E\,\cos(\omega t)$, qui s'écrit

$$s(t) = S_0 + S_1\,\cos(\omega t + \varphi_1) + \sum_{n>1} S_k\,\cos(n\omega t + \varphi_n)\,.$$

On mesure alors le rapport entre la moyenne quadratique (ou l'énergie) des composantes spectrales ajoutées par le système (souvent non désirées) et la moyenne quadratique (l'énergie) du signal total :

Définition : **Taux de Distorsion Harmonique (DTH, en dB)**

$$\mathrm{TDH} = 10\,\log_{10}\left(\frac{\sum_{k>1} S_k^2/2}{S_{\mathrm{eff}}^2}\right)$$

II. Décomposition d'un signal non périodique en intégrale de Fourier

Transformation de Fourier

Soit $s : t \to s(t)$ une fonction réelle non périodique. Sous des conditions mathématiques peu restrictives pour des signaux physiquement réalisables (cf programme de licence), on peut écrire $s(t)$ sous la forme d'une *intégrale de Fourier*

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{S}(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega} \quad \text{avec} \quad \hat{S}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

Les fonctions s et $\hat{S}$ sont dites *transformées de Fourier* l'une de l'autre.

La fonction $\hat{S}$ est le spectre de la fonction s (module et argument). Ainsi, on peut généraliser la notion de spectre à des fonctions non périodiques. Celui-ci devient continu et on perd la notion d'harmonique.

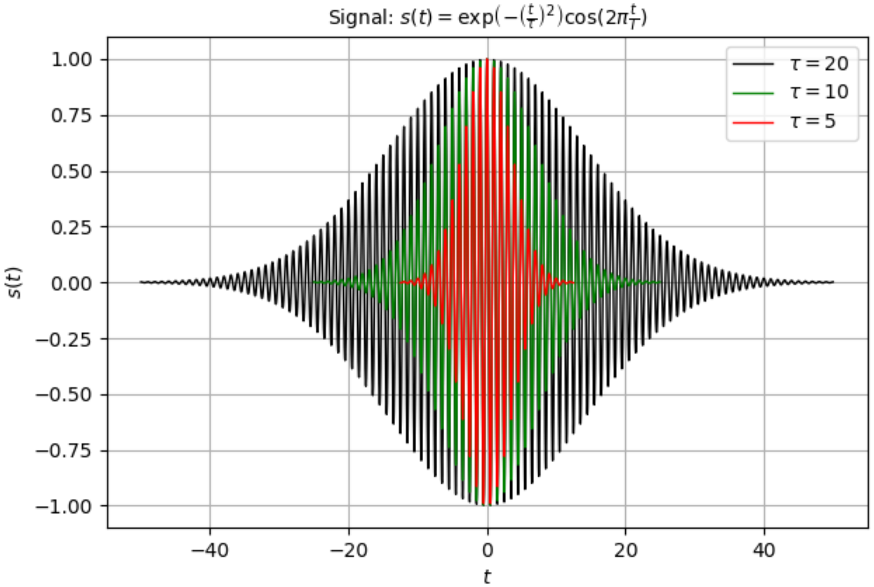
Remarque : Supposons que t soit la variable temps, ω est alors la pulsation et $f = \omega/2\pi$ est la fréquence.
Soit Δt l'extension temporelle de la fonction $f(t)$ et Δf l'extension en fréquence de son spectre F. On a la propriété suivante :

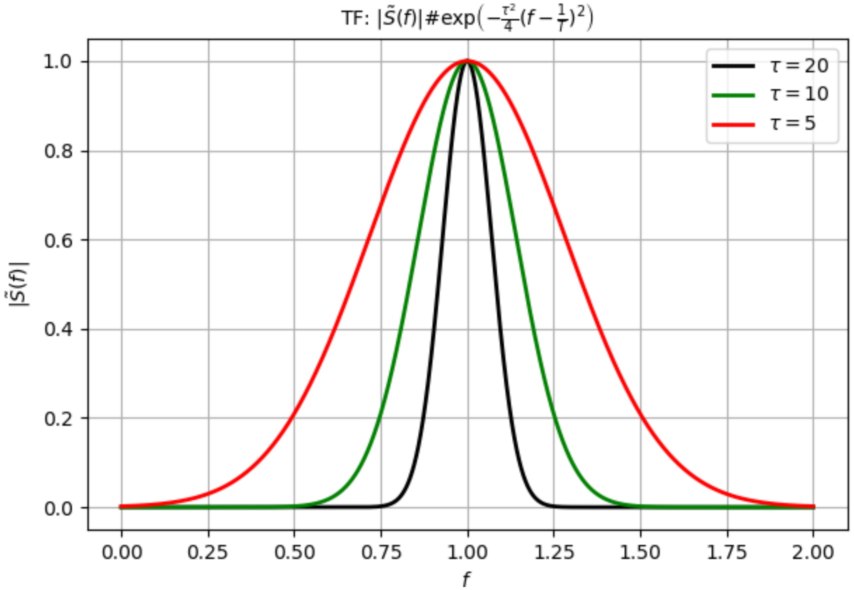
$$\Delta t.\Delta f \approx 1$$

Plus un signal est bref (long), plus son spectre est large (étroit) [6]**.**

On trouve une illustration de cette propriété ci-dessous pour un signal prenant la forme d'un « paquet d'onde » d'enveloppe gaussienne.

6. Le principe d'indétermination de Heisenberg est étroitement relié à cette propriété


Signal: $s(t) = \exp\left(-(\frac{t}{\tau})^2\right)\cos(2\pi\frac{t}{T})$
$\tau = 20$
$\tau = 10$
$\tau = 5$
$s(t)$
t
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−40
−20
0
20
40


TF: $|\tilde{S}(f)|\#\exp\left(-\frac{\tau^2}{4}(f-\frac{1}{T})^2\right)$
$\tau = 20$
$\tau = 10$
$\tau = 5$
$|\tilde{S}(f)|$
f
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00