Equations différentielles linéaires
(à coefficients constants)

On présente ici les solutions des équations différentielles les plus courantes en physique, ainsi que la méthode générale pour les retrouver. On se repose pour cela sur la structure générale de l'ensemble des solutions, qui sera établie en cours de maths. On s'intéresse exclusivement à des équations d'ordre 1 ou 2, les équations d'ordre supérieur pouvant en fait s'y ramener.

On considère des équations portant sur une fonction du temps notée $f(t)$. On note alors de façon condensée les dérivées première et seconde $\dot{f}(t)$ et $\ddot{f}(t)$. Toutefois tous les résultats sont applicables pour une fonction d'une autre variable, par exemple une variable d'espace ($f(x)$).

I. Equations Différentielles Linéaires (EDL)

1. EDL à coefficients constants avec second membre

Définition : Soient (a, b, c) trois scalaires a priori complexes (*coefficients constants*) et $t \mapsto g(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert I. $f(t)$ satisfait $\forall t \in I$ l'équation

$$\boxed{a\ddot{f}(t) + b\dot{f}(t) + cf(t) = g(t)} \tag{1}$$

Théorème : La Solution Générale de l'Equation Comple (SGEC) ci-dessus se décompose de la façon suivante :

$$f(t) = f_P(t) + f_H(t) \tag{2}$$

- $f_P(t)$ est une Solution Particulière à l'Equation Complète (SPEC) ;
- $f_H(t)$ est la Solution Générale de l'Equation Homogène associée (SGEH) :

$$a\ddot{f}_H(t) + b\dot{f}_H(t) + cf_H(t) = 0 \tag{3}$$

Remarque : On parle de solution *particulière* car $f_P(t)$ **est parfaitement déterminée**. Par contre, on parle de solution *générale* car $f_H(t)$ **n'est pas complètement déterminée** même si sa forme est connue (cf infra). Elle dépend des **conditions initiales** du problème.

Théorème : (Cauchy-Lipschitz)
Il existe une unique solution à l'Eq. (1) vérifiant les conditions initiales $f(t_0)$ et $\dot{f}(t_0)$.

2. Recherche de la SPEC

Le cas le plus important est résumé par le théorème suivant.

Théorème : Si $g(t) = P(t)\,e^{\alpha t}$ avec $P(t)$ un polynôme de degré n et α une constante, alors l'Eq. (1) admet une solution particulière de la forme $f_P(t) = Q(t)\,e^{\alpha t}$ où $Q(t)$ est :
- un polynôme de degré n si α n'est pas solution de l'*équation caractéristique* (cf section 3. ci-dessous) ;
- un polynôme de degré $n+1$ ($n+2$) si α est une solution simple (double) de l'*équation caractéristique*.

Le même théorème est valable en remplaçant $e^{\alpha t}$ par une fonction sinusoïdale $\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$ (solutions en $\cos(\omega t + \varphi)$ ou $\sin(\omega t + \varphi)$).

En pratique les cas particuliers les plus fréquents sont :
- $\alpha = 0$ et $P(t)$ de degré 0 : $g(t) = $ constante ;
- $P(t)$ de degré 0 : $g(t) = e^{\alpha t}$, ou $\cos(\omega t)$, ou $\sin(\omega t)$.

La suite du document est exclusivement consacrée à la SGEH, qui sera notée pour simplifier $f(t)$.

3. EDL à coefficients constants sans second membre (SGEH)

Théorème : La structure de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$a\ddot{f}_H(t) + b\dot{f}_H(t) + cf_H(t) = 0$$

est un **espace vectoriel** de dimension 2. Cela signifie qu'il existe deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ parfaitement déterminées, dont toute solution $f_H(t)$ est une **combinaison linéaire** :

$$f_H(t) = \lambda_1\, f_1(t) + \lambda_2\, f_2(t) \tag{4}$$

avec (λ_1, λ_2) des constantes réelles ou complexes (selon le contexte).

REMARQUE :

- Cette structure d'espace vectoriel correspond en physique au *principe de superposition* : une combinaison linéaire de deux solutions est solution.
- En toute rigueur mathématique, l'ensemble des solutions de l'EDL avec second membre est donc un espace **affine** (cf Eqs. (2) et (4)). Malgré cela les physiciens qualifient abusivement ces équations différentielles de «*linéaires*» plutôt que «*affines*», se référant en fait à la structure de l'équation homogène associée.

THÉORÈME : L'espace vectoriel des solutions de l'Eq. (3) est généré par deux solutions de la forme $\lambda\, e^{rt}$ ou $\lambda t\, e^{rt}$.

MÉTHODE : On commence par chercher des solutions du type $\lambda\, e^{rt}$, puis on élargit éventuellement si besoin au type $\lambda t\, e^{rt}$. Ces formes sont admissibles si et seulement si [a] r est solution de l'**Equation Caractéristique** (EC) :

$$a\, r^2 + b\, r + c = 0 \tag{5}$$

a. Le vérifier en injectant la forme $\lambda\, e^{rt}$ dans l'Eq. (3).

REMARQUE : Les racines de l'EC possèdent toujours la dimension de l'**inverse d'un temps** : T^{-1}.

II. EDLH à coefficients complexes (cas général)

1. Equation du premier ordre : $a = 0$

Si $b = 0$ ce n'est pas une équation différentielle, donc on suppose que $b \neq 0$ et on doit résoudre :

$$\boxed{b\dot{f}(t) + cf(t) = 0}$$

L'EC devient $b\, r + c = 0$. Sa racine est unique et vaut $r_0 = -\frac{c}{b}$. La SGEH est du type

$$f(t) = \lambda\, e^{-\frac{c}{b}t}$$

2. Equation du second ordre : $a \neq 0$

Les racines de l'EC dépendent du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

2.1. Racines distinctes : $\Delta \neq 0$

Il existe alors deux nombres complexes opposés $\pm z$ dont le carré vaut $z^2 = \Delta$. Les racines de l'équation caractéristique sont donc

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm z}{2a}\,,$$

en associant par exemple le signe $+$ à r_1 et le signe $-$ à r_2. La SGEH s'écrit donc sous la forme

$$f(t) = \lambda_1\, e^{r_1 t} + \lambda_2\, e^{r_2 t}$$

2.2. Racine double : $\Delta = 0$

L'EC possède alors une racine double $r_0 = -b/2a$. Il faut alors chercher une seconde solution du type $\mu\, t\, e^{r_0 t}$. La SGEH s'écrit donc sous la forme

$$f(t) = (\lambda t + \mu)\, e^{rt} = (\lambda t + \mu)\, e^{-\frac{b}{2a}t}$$

III. EDLH à coefficients réels

1. Equation du premier ordre

D'après ce qui précède, la SGEH est du type $f(t) = \lambda\, e^{r_0 t}$ avec $r_0 = -\frac{c}{b}$ qui est cette fois réel. Deux cas se présentent alors :

- Si $r_0 < 0$ on définit le temps caractéristique [1] $\tau = -\frac{1}{r_0} = \frac{b}{c}$. La SGEH est donc du type
$$f(t) = \lambda\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$
Elles tendent vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Elles décrivent un système **stable**, qui **relaxe** vers une situation d'équilibre. τ est alors appelé **temps de relaxation** du système.
Ce cas courant apparaît lorsque b et c sont de **même signe**.
- Si $r_0 > 0$ on définit le temps caractéristique $\tau = \frac{1}{r_0} = \frac{b}{c}$. La SGEH est donc du type
$$f(t) = \lambda\, e^{\frac{t}{\tau}}$$
Elle divergent (vers l'infini) lorsque le temps tend vers l'infini. Elles décrivent donc un système **instable**, s'écartant de plus en plus de sa situation initiale. Ce cas plus rare apparaît quand b et c sont de **signes contraires**. Toutefois c'est la plupart du temps à cause d'une **erreur de signe dans les calculs**.

1. L'équation se met sous la forme canonique $\dot{f} + \frac{1}{\tau}f = 0$.

2. Equation du second ordre

Ici le discriminant Δ est **réel**. On peut donc distinguer trois cas.

2.1. Discriminent strictement positif

L'EC a alors deux **racines réelles distinctes** :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2.2. Discriminent strictement négatif

L'EC a alors deux racines complexes conjuguées :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

2.3. Discriminent nul

L'EC possède alors une racine double $r_0 = -\frac{b}{2a}$ réelle. La SGEH est alors du type :

$$(\lambda t + \mu)\, e^{r_0\, t} = (\lambda t + \mu)\, e^{-\frac{b}{2a}\, t}$$

3. Critère de stabilité des systèmes du second ordre

Théorème : Un système dont l'évolution est décrite par une équation différentielle du **second ordre à coefficients constants réels** est **stable** si et seulement si **tous les coefficients sont de même signe**.

Démonstration Pour que les solutions vues précédemment décrivent le comportement d'un système stable, il faut qu'elles restent bornées quand le temps tend vers l'infini.

- Si $\Delta > 0$ les racines r_1 et r_2 sont réelles. La stabilité nécessite que les deux racines soient négatives. Leur somme b/a est donc négative et leur produit c/a est positif. Donc a, b, et c sont de même signe.
- Si $\Delta < 0$ les racines sont $r_{1,2} = \frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. La solution peut donc se mettre sous la forme
$$e^{-\frac{bt}{2a}} \left(\lambda_1\, e^{i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\, t} + \lambda_2\, e^{-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\, t} \right)$$
La fonction entre parenthèses est bornée et son module ne tend pas vers zéro. La stabilité nécessité donc que le terme $e^{-\frac{bt}{2a}}$ ne tende pas vers l'infini, ce qui impose b du même signe que a. Par ailleurs les racines étant complexes conjuguées, leur produit c/a est positif, c est donc du même signe que a.
- Enfin si $\Delta = 0$ la stabilité impose que la racine double $-b/2a$ soit négative, donc b du même signe que a. Or dans ce cas on a $c = b^2/4a$, donc c est du même signe que a.

Ainsi, dans tous les cas la stabilité correspond à des coefficients a, b, et c de même signe. On suppose dans la suite ces trois coefficients positifs, sachant qu'on peut aisément se ramener à ce cas s'ils sont tous les trois négatifs.

IV. EDLH à coefficients réels positifs

On s'intéresse dans ce paragraphe au cas d'une équation différentielle du second ordre à coefficients a, b et c réels positifs, ce qui est le cas le plus courant en physique de première année et seconde année (oscillateurs électriques, mécaniques...). Comme a n'est pas nul, on peut tout diviser par a :

$$\ddot{f} + \frac{b}{a}\,\dot{f} + \frac{c}{a}\,f = 0$$

On a donc à résoudre une équation qui ne dépend que de deux paramètres numériques, ce que l'on écrit sous **forme canonique**

$$\boxed{\ddot{f} + \frac{2}{\tau}\,\dot{f} + \omega_0^2\,f = 0}$$

en introduisant la **pulsation propre**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

et le **temps de relaxation** [2]

$$\tau = \frac{2a}{b}$$

L'équation caractéristique se met alors sous la forme

$$r^2 + \frac{2}{\tau} r + \omega_0^2 = 0$$

Son **discriminant réduit** peut s'écrire

$$\Delta' = \frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 = \lambda^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$$

2. On peut aussi définir le **coefficient d'amortissement** $\lambda = 1/\tau$, ou le **facteur de qualité** $Q = \omega_0 \tau/2$.

1. Discriminant positif : régime apériodique

Dans ce cas les racines r_1 et r_2 de l'EC sont **réelles négatives** : $r_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\Delta'}$. Et la SGEH est du type

$$\boxed{f(t) = \lambda_1\, e^{r_1\, t} + \lambda_2\, e^{r_2\, t}}$$

Elle **tend vers 0** lorsque le temps tend vers l'infini puisque les racines sont négatives.

2. Discriminent nul : régime critique

Dans ce cas l'EC possède une racine double **réelle négative** $-\omega_0 = -1/\tau$. La SGEH est alors du type

$$\boxed{f(t) = (\lambda\, t + \mu)\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Elle **tend vers 0** lorsque le temps tend vers l'infini.

3. Discriminent négatif : régime pseudopériodique

Dans ce cas les racines r_1 et r_2 de l'EC sont complexes conjuguées **à partie réelle négative** :

$$r_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm i\,\sqrt{-\Delta'}$$

En posant $\omega = \sqrt{-\Delta'}$, que l'on appelle **pseudopulsation**, la SGEH est alors du type

$$f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\, \left(\lambda_1\, e^{i\omega t} + \lambda_2\, e^{-i\omega t}\right)$$

Elle **tend vers 0** lorsque le temps tend vers l'infini.
Elle peut encore s'écrire, en posant $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ et $i(\lambda_1 - \lambda_2) = \mu_2$:

$$\boxed{f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\, (\mu_1 \cos\omega t + \mu_2 \sin\omega t)}$$

Dans cette expression, $-1/\tau$ est la partie réelle commune des racines, conjuguées, leurs parties imaginaires valant $\pm i\omega$. C'est cette dernière forme que l'on utilisera le plus souvent directement en pratique pour appliquer les conditions initiales. Toutefois on utilise aussi couramment la forme équivalente

$$\boxed{f(t) = A\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, \cos(\omega t + \varphi)}$$

où les constantes A et φ remplacent μ_1 et μ_2.

Cas particulier : l'oscillateur harmonique
Si $b = 0$, il n'y a pas de terme d'amortissement, et l'équation différentielle homogène s'écrit :

$$\ddot{f} + \omega_0^2\, f = 0$$

C'est celle d'un oscillateur harmonique, dont les solutions sont du type

$$f(t) = \mu_1 \cos\omega_0 t + \mu_2 \sin\omega_0 t = A\, \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

qui correspondent à $\tau \longrightarrow \infty$ dans les solutions précédentes.