

Filtres linéaires

Fonctions de transfert canoniques et diagrammes de Bode

On se place en régime sinusoïdal forcé (RSF), de pulsation ω .

- Tension d'entrée du filtre : $u_e(t) = U_e \cos(\omega t)$ et $\underline{u}_e = U_e e^{j\omega t}$.
- Tension de sortie du filtre : $u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \varphi)$ et $\underline{u}_s = U_s e^{j\varphi} e^{j\omega t}$.
- Fonction de transfert : $\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$ où N et D sont deux polynômes à coefficients réels.

Rappel de vocabulaire sur le RSF :

- *Amplitude* de u_s : U_s .
- *Amplitude complexe* de u_s : $\underline{U}_s = U_s e^{j\varphi}$.
- *Valeur efficace* de u_s : $U_s/\sqrt{2}$.

L'ordre du filtre est le degré de D . Qu'il soit d'ordre 1 ou 2, le filtre est **stable** si et seulement si les coefficients de D sont **tous de même signe** (cf équation différentielle associée). Ceci peut permettre d'identifier des erreurs de calcul¹.

Une fonction de transfert peut toujours se mettre sous la forme d'un rapport de deux fonctions chacune **sans dimension**². Ainsi on peut toujours définir une pulsation *caractéristique* ou *propre* qu'on peut noter ω_0 et tout exprimer en fonction de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et d'un paramètre sans dimension H_0 . Pour les filtres du second ordre, on doit introduire un second nombre sans dimension Q , appelé *facteur de qualité* du filtre, qui coïncide avec le *facteur de qualité* dans le cas des résonances³.

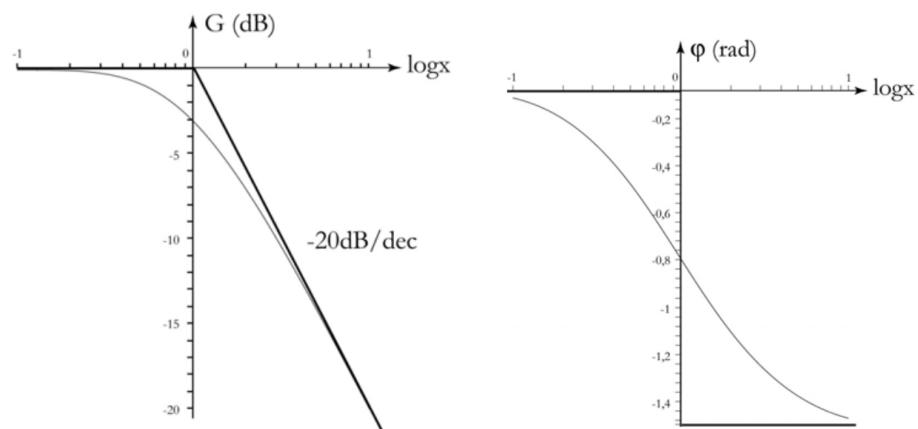
Tous les graphiques sont tracés pour $H_0 = 1$.

I. Filtres du premier ordre

FILTRE PASSE-BAS

$$\underline{H} = H_0 \frac{1}{1 + jx}$$

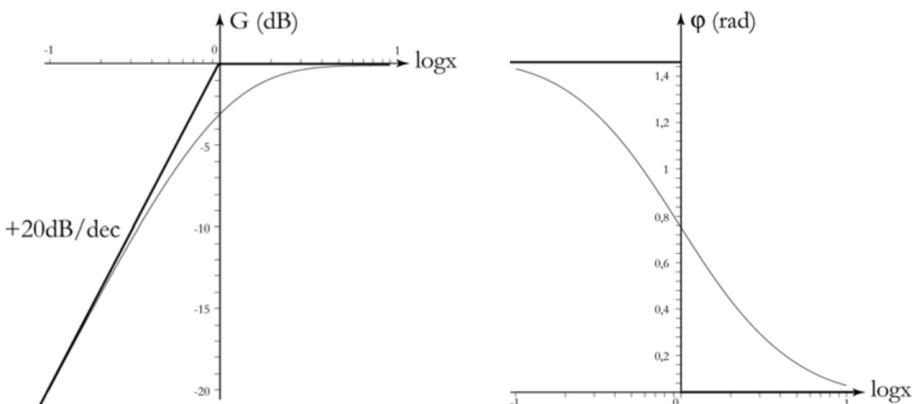
$|H_0|$ est le gain statique.



FILTRE PASSE-HAUT

$$\underline{H} = H_0 \frac{jx}{1 + jx}$$

$|H_0|$ est le gain à haute fréquence.



1. attention il faut écrire un polynôme en $j\omega$.

2. car c'est un rapport entre deux tensions, ou parfois deux courants.

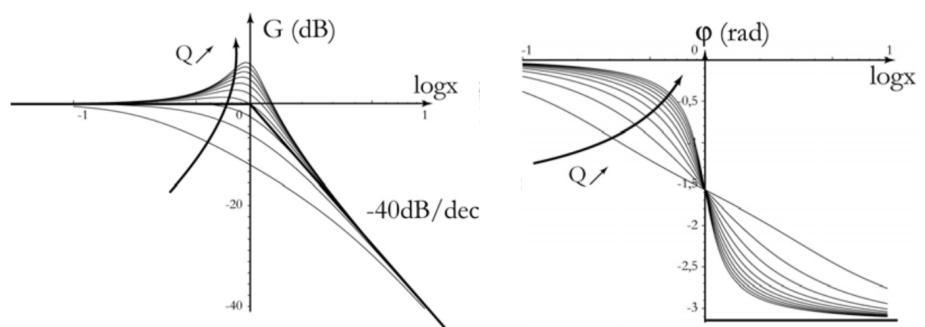
3. On définit aussi parfois plutôt le facteur d'amortissement ξ tel que $2\xi = \frac{1}{Q}$.

II. Filtres du second ordre

FILTRE PASSE-BAS

$$H = H_0 \frac{1}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

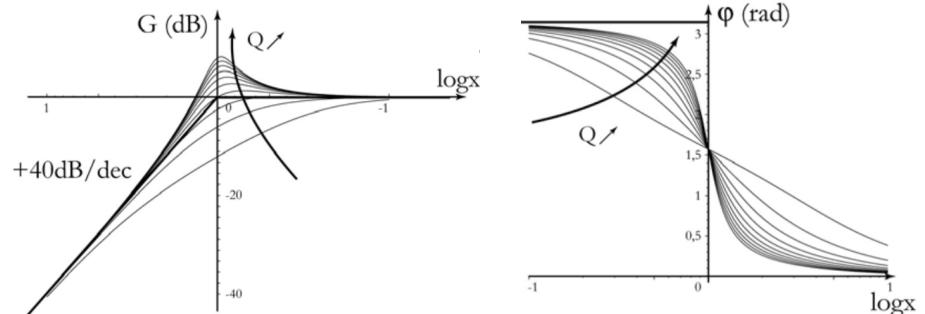
$|H_0|$ est le gain statique.



FILTRE PASSE-HAUT

$$H = H_0 \frac{-x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

$|H_0|$ est le gain à haute fréquence.

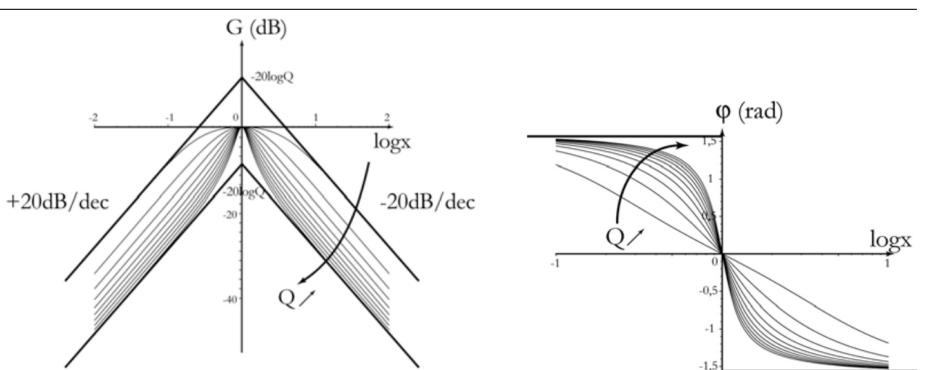


FILTRE PASSE-BANDE

$$H = H_0 \frac{j \frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

$$H = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

$|H_0|$ est le gain à la fréquence propre/résonance.

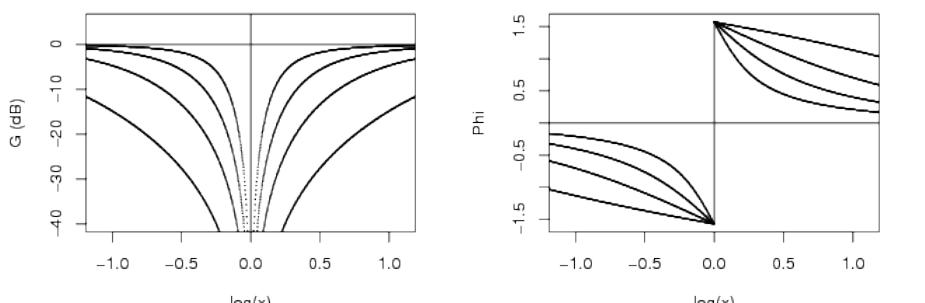


FILTRE RÉJECTEUR DE BANDE

$$H = H_0 \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

$$H = H_0 \frac{1}{1 - j \frac{1}{Q(x - \frac{1}{x})}}$$

$|H_0|$ est le gain à basse et haute fréquence.



PROPRIÉTÉS :

- **Symétrie plane** entre G_{dbPBas} et G_{dbPHaut} (1^{er} et 2nd ordre) car $|H_{\text{PBas}}(1/jx)| = |H_{\text{PHaut}}(jx)|$.
- Le diagramme de Bode de la phase $\varphi(x)$ est toujours à **symétrie centrale** autour de $x = 1$, car :
 - ★ 1^{er} ordre : $\varphi(x) = \arg(H_0) - \arctan(x) (+\frac{\pi}{2})$ or $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
 - ★ 2nd ordre : on peut toujours écrire $\varphi(x)$ à l'aide d'une unique relation fonction de $Q(x - \frac{1}{x})$ valable pour tout x , à condition de factoriser le dénominateur
 - par $j \frac{x}{Q}$ (cas passe-bas, passe-haut et passe-bande) : $\varphi(x) = \arg(H_0) - \arctan\left(Q(x - \frac{1}{x})\right) (\mp \frac{\pi}{2})$.
 - par $1 - x^2$ (cas du réjecteur) : $\varphi(x) = \arg(H_0) + \arctan\left(1/Q(x - \frac{1}{x})\right)$.