Théorèmes de Kœnig

Dans le cas général d'un système de points en mouvement quelconque, nous avons vu qu'il est nécessaire de distinguer le *mouvement d'ensemble* du *mouvement propre*.
La distinction apparaît naturellement via le théorème du centre d'inertie, qui introduit le mouvement d'ensemble comme celui du centre de masse (barycentre). Ceci incite alors à définir le mouvement propre comme le mouvement par rapport au centre d'inertie. Nous allons voir ici [1] que cette décomposition s'avère judicieuse pour aussi pour le moment cinétique et l'énergie. Cela nécessite de définir le référentiel barycentrique.

Référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$

DÉFINITION : Soit $\mathcal{R}$ le référentiel d'étude. $\mathcal{R}^*$ est le référentiel **en translation** par rapport à $\mathcal{R}$, et centré sur le centre de masse G du système.

PROPRIÉTÉS :

- C'est le bon référentiel pour étudier le mouvement propre.
- Dans le cas où il est galiléen (si $\mathcal{R}$ l'est et que G a un mouvement de translation rectiligne uniforme), alors on peut appliquer le TMC en G (comme s'il était fixe) et le TEC dans $\mathcal{R}^*$ [2].
- La propriété précédente est encore vraie dans le cas où $\mathcal{R}^*$ n'est pas galiléen mais que $\mathcal{R}$ l'est, et que G a un mouvement de uniformément accéléré (exemple : chute libre) [3].

Théorèmes de Kœnig

Soit le système $\mathcal{S} = \{M_i(m_i), i = 1, N\}$, de centre de masse G, et de masse totale $m = \sum_i m_i$.
La vitesse du point M_i dans $\mathcal{R}$ est notée $\vec{v}_i = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_i}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$.

1. L'ensemble des résultats de ce document sont malheureusement devenus hors programme à la dernière réforme. Ils sont pourtant indispensables pour avoir une vision complète de la mécanique des systèmes. Outre l'intérêt pour l'étude de tout objet mobile combinant translation et rotation propre (très fréquent !), ces théorèmes sont fondamentaux pour fonder correctement la thermodynamique, qui est l'étude des systèmes à grand nombre de particules (premier principe, énergie interne...).
2. Démonstration à faire en exercice
3. Démonstration possible en SPE, via les changements de référentiels.

La vitesse du point G dans $\mathcal{R}$ est notée $\vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$.
La vitesse du point M_i dans $\mathcal{R}^*$ est notée $\vec{v}_i{}^* = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}^*}$.
La composition des mouvement (en relativité galiléenne) s'écrit ainsi [4] :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{v}_i{}^*$$

THÉORÈME : Premier théorème de Kœnig
Décomposition du moment cinétique total de $\mathcal{S}$ en O par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\boxed{\vec{\sigma}(O)_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{\sigma}^*} \quad \text{avec}$$

$\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}(G)_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{v}_i{}^*$ le *moment cinétique barycentrique.*

Démonstration :
On applique la composition des vitesses, une relation de Chasles, et on introduit la définition-propriété du barycentre.

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}(O)_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} &= \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i (\vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{v}_i{}^*) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OM_i}\right) \wedge \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \overrightarrow{OG} \wedge \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i{}^*\right) + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{v}_i{}^* \\
&= m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{0} + \vec{\sigma}^*
\end{aligned}$$

THÉORÈME : Second théorème de Kœnig
Décomposition de l'énergie cinétique totale de $\mathcal{S}$ par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\boxed{E_{c_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = \frac{1}{2} m \vec{v}_{G/\mathcal{R}}^2 + E_{c_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*}}} \quad \text{avec} \quad E_{c_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*}} = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i \vec{v}_i{}^{*2}$$

l'énergie cinétique barycentrique.

4. car $\mathcal{R}^*$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$, cf SPE.

Démonstration :
On utilise exactement la même démarche...

$$\begin{aligned}
E_{c_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}} &= \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\ 2} = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i (\vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{v}_i^{\ *})^2 \\
&= \tfrac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) \vec{v}^2_{G/\mathcal{R}} + \vec{v}_{G/\mathcal{R}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^{\ *} \right) + \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\ *2} \\
&= \frac{1}{2} m \vec{v}^2_{G/\mathcal{R}} + \vec{v}_{G/\mathcal{R}} \cdot \vec{0} + E_{c_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*}}
\end{aligned}$$

Conclusion : Les théorèmes de Kœnig expriment que l'**on peut simplement additionner le moment (l'énergie) cinétique du mouvement d'ensemble et celui (celle) du mouvement propre**, ce qui confirme que le centre de masse est la bonne référence pour découpler les deux mouvements.