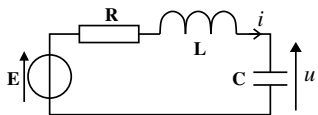


ÉLECTROCINÉTIQUE

I. Etincelle de rupture

1.



La loi des mailles s'écrit

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + u \quad \text{avec} \quad i = C \frac{du}{dt},$$

ce qui conduit à

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

2. $Q = 500 \gg 1$. Donc le discriminant de l'équation caractéristique $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$ est négatif. Ainsi le régime transitoire est pseudo-périodique :

$$u(t) = E + e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

3. Le temps caractéristique des variations de $u(t)$ est la pseudo-période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{car} \quad Q \gg 1, \quad \text{donc} \quad \frac{\tau}{T} \approx \frac{\tau \omega_0}{2\pi} = \frac{Q}{\pi} \approx 159 \gg 1.$$

4. On écrit donc $u(t) = E + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ (car $\omega \approx \omega_0$). À l'instant initial, la tension aux bornes du condensateur est continue et c'est celle d'un simple fil, donc $u(0) = 0$. Le courant est continu à cause de la bobine, et sa valeur est donnée par le circuit en régime permanent sans la capacité. La bobine équivaut alors à un fil et $i(0) = E/R$.

On a donc

$$u(0) = 0 = E + A \Leftrightarrow A = -E \quad \text{et} \quad i(0) = \frac{E}{R} = CB\omega_0 \Leftrightarrow B = \frac{E}{RC\omega_0} = EQ.$$

Cela conduit à $u(t) = E (1 - \cos(\omega_0 t) + Q \sin(\omega_0 t))$.

5. Le second terme sinusoïdal a donc une amplitude beaucoup plus grande que le premier. Il va rapidement dominer dès les premiers instants. On peut s'en convaincre en ré-écrivant :

$$u(t) = E + E\sqrt{1+Q^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{1+Q^2}} \cos(\omega_0 t) + \frac{Q}{\sqrt{1+Q^2}} \sin(\omega_0 t) \right) = E - E\sqrt{1+Q^2} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2}}, \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{1+Q^2}}, \text{ et } \tan \varphi = Q.$

Comme $Q \gg 1$, on a $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ (1er quadrant) et $\sqrt{1+Q^2} \approx Q$, d'où finalement $u(t) \approx E + EQ \sin(\omega_0 t)$. Ainsi la tension $u(t)$ commence par croître, et ce rapidement puisque son amplitude QE est beaucoup plus grande que le régime permanent qu'il devrait atteindre (à savoir E).

La tension de claquage est atteinte à l'instant t_c tel que

$$V_c = E + EQ \sin(\omega_0 t_c) \Leftrightarrow t_c = \sqrt{LC} \arcsin \left(\frac{V_c/E - 1}{Q} \right) = 9,6 \times 10^{-9} \text{ s}.$$

En comparaison, la période propre du circuit vaut $T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 1,3 \times 10^{-6} \text{ s}$, ce qui confirme que l'étincelle intervient très rapidement par rapport à la dynamique propre du circuit.

II. Quartz et piézo-électricité (d'après ENSTIM 2004)

II.1. Modélisation électro-mécanique d'un résonateur à quartz

- On obtient $C_P = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \pi D^2}{4e} = 8,0 \text{ pF}$. La charge est liée à la tension par $q_1(t) = C_P v(t)$.
- En multipliant l'équation du mouvement par γ on obtient

$$m\ddot{q}_2 + h\dot{q}_2 + kq_2 = \beta\gamma v.$$

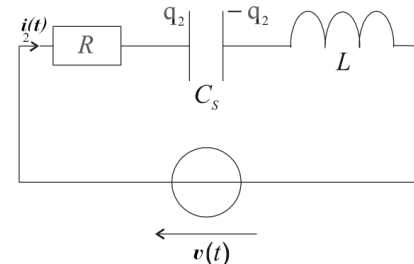
Le circuit RLC série vérifie la loi des mailles :

$$Ri_2 + \frac{q_2}{C_S} + L \frac{di_2}{dt} = v \quad \text{avec} \quad i_2 = \dot{q}_2$$

$$\text{d'où} \quad L \frac{d^2 q_2}{dt^2} + R \frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C_S} = v.$$

En comparant les deux équations (même second membre v à droite) on obtient les équivalences suivantes :

$$L = \frac{m}{\beta\gamma}, \quad R = \frac{h}{\beta\gamma} \quad \text{et} \quad C_S = \frac{\beta\gamma}{k}.$$



3. a) Les admittances deux branches en dérivation s'additionnent :

$$\underline{Z}_{AB} = \left(j\omega C_P + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_S} + j\omega L} \right)^{-1} = \frac{1 - \omega^2 C_S L}{j\omega C_P (1 - \omega^2 C_S L) + j\omega C_S} = \frac{-j}{\omega(C_P + C_S)} \cdot \frac{1 - \omega^2 C_S L}{1 - \omega^2 \frac{C_P C_S}{C_P + C_S}}$$

$$\text{d'où} \quad \underline{Z}_{AB} = \left(-\frac{j}{\alpha\omega} \right) \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}} \quad \text{avec} \quad \alpha = C_P + C_S, \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{C_S L}} \quad \text{et} \quad \omega_a = \sqrt{\frac{C_P + C_S}{C_P C_S L}}.$$

b) On obtient $f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_P + C_S}{C_P C_S L}} = 8,00 \times 10^5 \text{ Hz}$ et $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{C_S L}} = 7,96 \times 10^5 \text{ Hz}$.

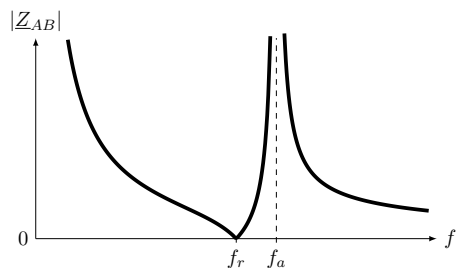
c) Étant donné que $f_r < f_a$ (et donc $\omega_r < \omega_a$), le quartz a un comportement inductif lorsque

$$\text{Im}(\underline{Z}_{AB}) > 0 \Leftrightarrow f \in]f_r, f_a[.$$

Inversement il aura un comportement capacitif lorsque $f \in [0, f_r[\cup]f_a, \infty[$.

d) On a donc $|\underline{Z}_{AB}| = \frac{1}{\alpha 2\pi f} \left| \frac{1 - \frac{f^2}{f_a^2}}{1 - \frac{f^2}{f_r^2}} \right| > 0$, qui diverge en 0 et f_a , et s'annule en f_r . Entre ces valeurs une représentation graphique (sur calculatrice) permet de se convaincre que le comportement est monotone¹.

1. L'analyse du signe de la dérivée est beaucoup trop calculatoire pour avoir sa place ici.



4. a) Par la loi du pont diviseur de tension on obtient
$$\underline{H} = \frac{R_v}{R_v + \underline{Z}_{AB}} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_{AB}/R_v}.$$

b) Comme \underline{Z}_{AB} est un imaginaire pur, on obtient

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + |\underline{Z}_{AB}|^2/R_v^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\underline{Z}_{AB}| = \sqrt{3} R_v.$$

c) On obtient $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 1,59 \times 10^4$ (avec $f_0 = 796$ kHz, qui correspond à f_r), ce qui conduit à

$$R = \frac{L\omega_0}{Q} = 2\pi\Delta f L = 157 \Omega.$$

II.2. Principe d'une montre à quartz

5. a) Le compteur divise la fréquence par 2. En sortie on obtient un signal à $32768/2 = 16384$ Hz

b) $32768 = 2^k \Leftrightarrow k = \frac{\ln 32768}{\ln 2} = 15$, donc $32768 = 2^{15}$. En mettant en cascade 15 compteurs modulo 2, on obtient une fréquence de 1,0000 Hz, donc on commande les secondes².

2. On garde 5 chiffres significatifs. Plus précisément la précision relative est de $\frac{1}{32768} = 3,1 \times 10^{-5}$ s. On peut dire que la montre retarde ou avance potentiellement de une seconde toutes les 32768 secondes, soit toutes les 9h06 min.