ONDES ET MÉCANIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Cuve à ondes

On considère une cuve à ondes, constituée d'une nappe d'eau dont la surface au repos est dans le plan horizontal Oxy.

Lame vibrante

Une lame d'axe Oy, vibrant verticalement à la fréquence $f = 100\,\text{Hz}$, produit à la surface de cette nappe d'eau une onde plane progressive harmonique transversale, d'amplitude $a = 1,0\,\text{mm}$. L'onde se propage selon l'axe Ox à la célérité constante $c = 36\,\text{cm.s}^{-1}$. Le milieu est supposé non dispersif et non absorbant. Les variations en fonction du temps t de la hauteur d'eau au point S d'abscisse $x_S = 0$ sont supposées sinusoïdales :

$$z(0,t) = a\cos(2\pi f t)$$

On étudie la propagation de l'onde plane selon Ox, où l'on repère la position en un point P quelconque de la surface de l'eau par son abscisse x. On pose $\overrightarrow{u_x}$ un vecteur unitaire de l'axe Ox.

1. Exprimer la longueur d'onde λ et la calculer numériquement.

2. Exprimer littéralement le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ à partir des données de l'énoncé.

Par la suite, on notera k la norme du vecteur d'ondes et ω la pulsation.

3. Écrire, en la justifiant, l'expression de $z(x,t)$ du point P à l'abscisse x en fonction du temps t.

4. Comparer, par rapport au mouvement de la surface de l'eau à la source (point S d'abscisse $x = 0$), les mouvements des points de la surface M d'abscisse $x_M = \frac{3\lambda}{4}$ et N d'abscisse $x_N = 5\lambda$.
Représenter graphiquement, sur un même graphe, les mouvements de S, M et N en fonction du temps.

Interférences

La lame vibrante est maintenant remplacée par deux pointes situées en S_1 et S_2, distantes de $a = S_1S_2$. Celles-ci frappent simultanément la nappe d'eau, à intervalles réguliers. Ces deux pointes génèrent des ondes qui interfèrent, comme le montre la Fig. (1) (gauche) ci-dessous où la cuve à ondes est vue de dessus, éclairée par un stroboscope. La figure est claire là où la surface de l'eau est convexe et foncée là où elle est concave. L'amplitude d'oscillation est plus faible là où la figure est moins contrastée.

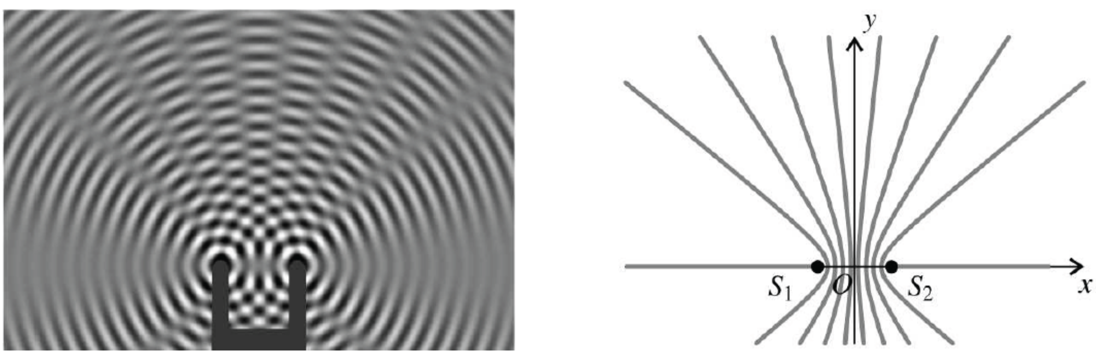


FIGURE 1 – Ondes circulaires de surface générées par deux sources ponctuelles synchrones (à gauche), et les lignes de vibration minimale qui leur sont associées (à droite).

On modélise ces ondes par des ondes sinusoïdales sphériques (ou circulaires) émises par des sources ponctuelles, situées aux points S_1 et S_2 où les pointes frappent la surface de l'eau.

5. En notant λ la longueur d'onde, donner la condition pour que l'interférence en un point M situé aux distances d_1 et d_2 respectivement de S_1 et de S_2, soit destructive.

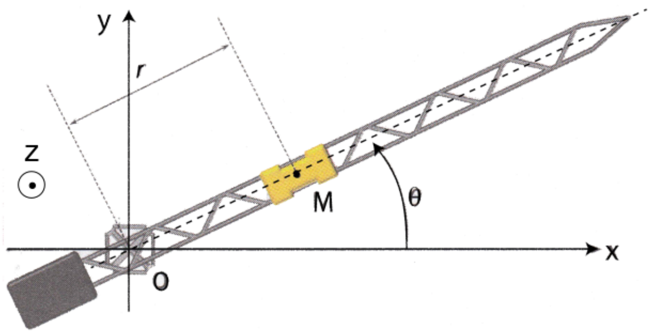
6. Le lieu des points vérifiant cette condition est un ensemble de courbes que l'on appelle « ligne de vibration minimale ». Ce sont des hyperboles. Elles sont représentées sur la Fig. (1) (droite).

a) Les parties $x < -\frac{a}{2}$ et $x > \frac{a}{2}$ de l'axe Ox sont des lignes de vibration minimale. En déduire un renseignement sur a/λ.

b) Sur le segment $[S_1S_2]$, quel est l'intervalle de variation de $d_2 - d_1$? Déduire de la figure la valeur de a/λ.

II. Mouvements générés par une grue

Le bras d'une grue tourne dans un plan horizontal (Oxy) à la vitesse angulaire constante $\omega_0 > 0$. Sur ce bras, un chariot assimilé à un point M se translate à vitesse constante $v_0 > 0$ par rapport au bras. L'axe (Ox) est fixe par rapport au sol, et confondu avec le bras de grue à l'instant initial $t = 0$. Le mouvement est observé depuis le sol (référentiel terrestre $\mathcal{R}$). À l'instant initial, le chariot se trouve quasiment au centre de rotation O du bras, légèrement décalé vers la droite (décalage négligeable), le chargement étant positionné au pied de la grue.



Dans tout le problème, on étudie le mouvement de M avec le système de coordonnées polaires $(r = OM, \theta)$ et sa base associée, à l'exception du calcul du rayon de courbure.

Approche générale de la trajectoire

1. Établir l'expression des loi horaires $r(t)$ et $\theta(t)$ en fonction de ω_0 et v_0. En déduire l'équation intrinsèque de la trajectoire. Comment peut-on nommer cette trajectoire ?

2. Établir l'expression des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ de M, d'abord en fonction du temps puis en fonction de θ.
Calculer leur norme en fonction de θ.

3. Déterminer les caractéristiques du mouvement de M (distance r, vitesse et accélération) lorsque $\theta = 0$, $\frac{\pi}{2}$, et π.
Représenter graphiquement $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en ces positions, puis dessiner l'allure de la trajectoire sur cet intervalle. On prendra soin de respecter les proportions.

Calcul du rayon de courbure

Pour calculer le rayon de courbure de cette trajectoire, on utilise momentanément la base orthonormée de Frenet $(\vec{t}, \vec{n})$.

4. Rappeler la définition de $\vec{t}$ et déterminer son expression en fonction de θ dans la base polaire.

5. Définir maintenant $\vec{n}$ et déterminer son expression en fonction de θ dans la base polaire, en s'appuyant sur l'expression de $\vec{t}$. On pourra s'aider d'un schéma.

6. En déduire l'expression du rayon de courbure ρ en fonction de v_0, ω_0 et θ.

7. En quelle position θ_0 obtient-on le plus petit rayon de courbure, et quelle est sa valeur ? On prendra $v_0 = 3,0\,\text{m.s}^{-1}$ et $\omega_0 = 0,5\,\text{rad.s}^{-1}$.

Optimisation des vitesses

Le grutier étant positif au coronavirus, le chef de chantier décide d'employer son fils pour terminer le chantier dans les délais, pendant les vacances scolaires. Le grutier en herbe étant préparationnaire en CPGE, il s'emploie à tenter d'optimiser les paramètres pour écourter la durée de la tâche. Celle-ci consiste à déplacer les éléments en béton préfabriqués du point O vers le point A de coordonnées $(r = d, \theta = \pi)$. Par souci de simplification, il considère donc ω_0 et v_0 constantes, comme ci-dessus.

8. Proposer une première relation entre v_0 et ω_0 lui permettant d'atteindre le point A comme demandé.

9. En cours de rotation, le bloc de béton, assimilé à un point matériel B de masse m, est suspendu par un câble de longueur $\ell = 10\,\text{m}$. Au cours du mouvement, ce câble s'incline d'un angle α par rapport à la verticale.
Établir l'expression de α en fonction de la position θ de M, en considérant pour simplifier que le mouvement est suffisamment lent pour que l'accélération de B soit la même que celle de M. On notera g l'intensité du champ de pesanteur.

10. Par souci de sécurité, son père lui demande de ne pas dépasser la limite $\alpha_m = 30°$. En déduire une nouvelle relation entre v_0 et ω_0 permettant de satisfaire cette contrainte pendant la totalité du mouvement.

11. En déduire les expressions et valeurs numériques des valeurs maximales acceptables de v_0 et ω_0. On prendra $d = 25\,\text{m}$ et $g = 9,8\,\text{m.s}^{-2}$.

Sachant que les blocs sont des carrés de côté $a = 2\,\text{m}$, et que le bâtiment voisin, situé à la distance $D = 30\,\text{m}$ du pied de la grue, constitue un obstacle à éviter, le jeune taupin se demande s'il peut se permettre d'adopter ces valeurs de vitesses maximales.

12. Calculer l'angle β entre le bras de la grue et le plan vertical $(\overrightarrow{MB}, \vec{u}_z)$, qui est aussi l'angle $\beta = (\widehat{-\vec{u}_r, \vec{a}})$. On se placera au moment où M est en A.

13. En déduire la distance du centre B du bloc de béton par rapport au pied de la grue à la fin de la rotation. Commenter.

* * * Fin de l'épreuve * * *