

# ONDES ET MÉCANIQUE

## I. Ondes capillaires dans une cuve à ondes

1.  $\lambda = \frac{c}{f} = 3,6 \text{ mm.}$

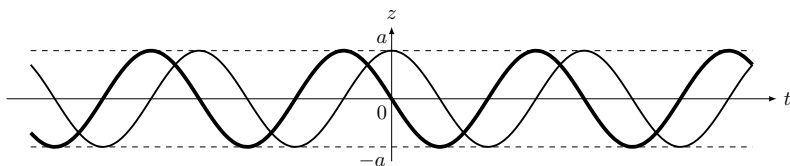
2.  $\vec{k} = +k\vec{u}_x$  avec  $k = \frac{2\pi f}{c}$  pour un milieu non dispersif.

3. L'onde progressive se propage à la vitesse  $c$  selon les  $x$  croissant sans déformation (milieu non absorbant et non dispersif). Donc à l'instant  $t$ , le signal est observé à la position  $x$  avec un retard  $\frac{x}{c}$  par rapport au signal en  $x = 0$ . Donc  $z(x, t) = z(0, t - \frac{x}{c})$ .

Ainsi :  $z(x, t) = a \cos(\omega t - \omega \frac{x}{c}) \Rightarrow z(x, t) = a \cos(\omega t - kx)$ .

4. 
$$\begin{cases} z(x_M, t) = a \cos(\omega t - \frac{3k\lambda}{4}) = a \cos(\omega t - \frac{3\pi}{2}) = a \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ z(x_N, t) = a \cos(\omega t - 5k\lambda) = a \cos(\omega t - 5\pi) = a \cos(\omega t + \pi) \end{cases}$$

Les points  $M$  et  $N$  ont le même mouvement que  $S$  (sinusoïdal d'amplitude  $a$  et de fréquence  $f$ , trait fin ci-dessous), mais celui de  $M$  est déphasé de  $+\frac{\pi}{2}$  [ $2\pi$ ] (trait épais ci-dessous). L'onde paraît donc en avance de phase (quadrature) en  $M$  par rapport à la source  $S$ .

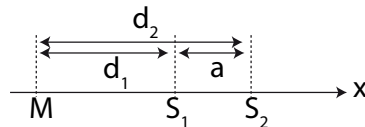


5. Le déphasage entre les deux ondes (1 par rapport à 2) vaut  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$  en notant la différence de marche  $\delta = S_2M - S_1M$ . La condition d'interférence destructive s'écrit

$$\Delta\varphi = (2p+1)\pi \Leftrightarrow \delta = d_2 - d_1 = (2p+1)\frac{\lambda}{2} = (p + \frac{1}{2})\lambda \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}.$$

6. a)

Lorsque  $M$  est le long de l'axe  $Ox$ , la différence de marche vaut  $\delta = d_2 - d_1 = \pm a$  (cf figure ci-contre,  $-a$  si  $M$  est à droite de  $S_2$ ).



Sur les lignes de vibration minimale  $x < -\frac{a}{2}$  et  $x > \frac{a}{2}$ , on a alors :

$$\pm a = \pm(2p+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{avec } p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{a}{\lambda} = p + \frac{1}{2} \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}.$$

b) Sur le segment  $[S_1S_2]$ , la différence de marche  $\delta = d_2 - d_1$  varie entre  $-a$  et  $+a$ , donc

$$\frac{\delta}{\lambda} \in [-(p + \frac{1}{2}), +(p + \frac{1}{2})]$$

En chaque point de ce segment où la vibration est minimale, on a  $\frac{\delta}{\lambda} = k + \frac{1}{2}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , ce qui arrive  $2(p+1)$  fois ( $p+1$  fois pour  $\delta > 0$  et  $p+1$  fois pour  $\delta < 0$ ). D'après la figure il y a  $2(p+1) = 10$  telles positions donc  $p = 4$  et  $\frac{a}{\lambda} = 4,5$ .

## II. Mouvements générés par une grue

### Approche générale de la trajectoire

1. D'après les données :

- $\dot{r} = v_0 = \text{constante}$  et  $r(0) = 0$ , d'où  $r = v_0 t$ .
- $\dot{\theta} = \omega_0 = \text{constante}$  et  $\theta(0) = 0$ , d'où  $\theta = \omega_0 t$ .

Ceci conduit à l'équation intrinsèque de la trajectoire  $r = \frac{v_0}{\omega_0} \theta$ . Il s'agit d'une spirale divergente.

2. On a  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$  donc comme  $\frac{d\vec{u}_r}{dt}|_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$  et  $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}|_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$ , on obtient

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{d'où} \quad \vec{v} = v_0\vec{u}_r + v_0\omega_0\vec{u}_\theta, \text{ puis}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}|_{\mathcal{R}} \quad \text{d'où} \quad \vec{a} = -v_0\omega_0^2\vec{u}_r + 2v_0\omega_0\vec{u}_\theta.$$

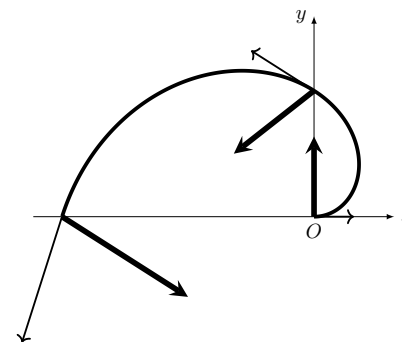
En utilisant que  $\theta = \omega_0 t$ , on obtient

$$\vec{v} = v_0(\vec{u}_r + \theta\vec{u}_\theta) \quad \text{et} \quad \vec{a} = v_0\omega_0(-\theta\vec{u}_r + 2\vec{u}_\theta).$$

$$\text{D'où} \quad \|\vec{v}\| = v_0\sqrt{1 + \theta^2} \quad \text{et} \quad \|\vec{a}\| = v_0\omega_0\sqrt{\theta^2 + 4}.$$

3. On obtient les expressions suivantes. On en déduit le graphe ci-dessous (vitesse en traits fins, accélération en traits épais), sur lequel on prend en compte l'augmentation en norme de la vitesse et de l'accélération.

$\theta$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$r$	$\frac{v_0}{\omega_0}$	$\frac{v_0\pi}{2\omega_0}$	$\frac{v_0\pi}{\omega_0}$
$\vec{u}_r$	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$-\vec{u}_x$
$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_y$	$-\vec{u}_x$	$-\vec{u}_y$
$\frac{1}{v_0}\vec{v}$	$\vec{u}_r = \vec{u}_x$	$\vec{u}_r + \frac{\pi}{2}\vec{u}_\theta = \vec{u}_y - \frac{\pi}{2}\vec{u}_x$	$\vec{u}_r + \pi\vec{u}_\theta = -\vec{u}_x - \pi\vec{u}_y$
$\frac{1}{v_0\omega_0}\vec{a}$	$2\vec{u}_\theta = 2\vec{u}_y$	$-\frac{\pi}{2}\vec{u}_r + 2\vec{u}_\theta = -\frac{\pi}{2}\vec{u}_y - 2\vec{u}_x$	$-\pi\vec{u}_r + 2\vec{u}_\theta = \pi\vec{u}_x - 2\vec{u}_y$



**Calcul du rayon de courbure**

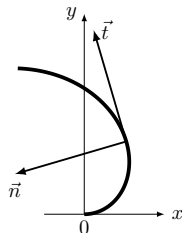
4. Par définition

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \text{ avec } \vec{v} = v_0(\vec{u}_r + \theta\vec{u}_\theta) \text{ d'où } \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}(\vec{u}_r + \theta\vec{u}_\theta).$$

5.

Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  est dirigé vers la concavité de la courbe donc forme un angle  $(\vec{t}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2}$ . On obtient

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}(-\theta\vec{u}_r + \vec{u}_\theta) \text{ qui vérifie bien } \vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \text{ et } \|\vec{n}\| = 1.$$



6. En notant  $v = \|\vec{v}\|$ , l'expression générale de l'accélération s'écrit

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{\vec{a} \cdot \vec{n}} = \frac{v_0^2(1+\theta^2)\sqrt{1+\theta^2}}{v_0\omega_0(\theta^2+2)} \text{ d'où } \rho = \frac{v_0}{\omega_0} f(\theta) \text{ avec } f(\theta) = \frac{(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{2+\theta^2}.$$

7. Posons  $X = \theta^2$ .

$$f(\theta) = g(X) = \frac{(1+X)^{\frac{3}{2}}}{2+X} \Rightarrow g'(X) = \frac{\sqrt{1+X}(2+X/2)}{(2+X)^2} > 0 \quad \forall X \geq 0$$

donc  $f(\theta)$  croît avec  $\theta$ . Le rayon de courbure est minimal  $\theta_0 = 0$  et vaut  $\rho_{\min} = \frac{v_0}{2\omega_0} = 3,0 \text{ m}$ .

**Optimisation des vitesses**

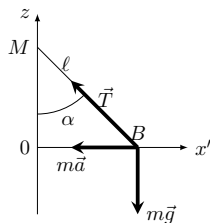
8. On impose à la trajectoire de passer par le point  $A : r(\theta = \pi) = d = \frac{v_0}{\omega_0} \pi \Leftrightarrow \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{d}{\pi}$ .

9. L'angle du câble par rapport à la verticale dépend de l'accélération  $\vec{a}$  du point  $B$ . On applique le Principe Fondamental de la Dynamique au point  $B$  dans  $\mathcal{R}$  supposé galiléen.

Il est soumis à son poids  $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$  et à la tension du câble, colinéaire au câble (cf figure ci-contre). On note  $T = \|\vec{T}\|$ .

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \Rightarrow \begin{cases} (\vec{u}_{x'}) : T \sin \alpha = m \|\vec{a}\| \\ (\vec{u}_z) : T \cos \alpha = mg \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\|\vec{a}\|}{g},$$

$$\text{d'où } \alpha = \arctan\left(\frac{v_0\omega_0}{g} \sqrt{\theta^2 + 4}\right).$$



10.  $\alpha$  augmente avec  $\theta$ , et sera maximal en  $\theta = \pi$ . On impose donc

$$\tan \alpha(\theta = \pi) \leq \tan \alpha_m \Leftrightarrow v_0\omega_0 \leq \frac{g \tan \alpha_m}{\sqrt{\pi^2 + 4}}.$$

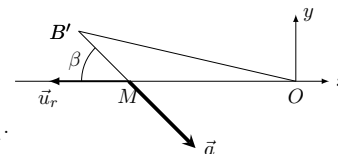
11. En faisant le produit et le quotient des conditions trouvées en 8. et 10. on obtient

$$v_0 \leq \sqrt{\frac{gd \tan \alpha_m}{\pi \sqrt{\pi^2 + 4}}} = 3,5 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } \omega_0 \leq \sqrt{\frac{g\pi \tan \alpha_m}{d\sqrt{\pi^2 + 4}}} = 0,44 \text{ rad.s}^{-1} = 25^\circ \cdot \text{s}^{-1}.$$

12. En notant  $B'$  le projeté du point  $B$  (centre de la plaque de béton) dans le plan horizontal contenant le bras de la grue, le schéma du problème est le suivant.

$$\text{On a } \vec{a} \cdot \vec{u}_r = -\|\vec{a}\| \cos \beta \Leftrightarrow \cos \beta = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{u}_r}{\|\vec{a}\|} = \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + 4}}$$

$$\text{avec } \theta = \pi \text{ d'où } \beta = \arccos\left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}}\right) = 0,57 \text{ rad} = 32^\circ.$$



13. La distance de  $B$  par rapport au pied de la grue correspond à  $OB'$  sur le schéma ci-dessus. On l'obtient en appliquant le théorème de Pythagore généralisé, en notant que  $OM = d$  et  $MB' = \ell' \sin \alpha_m$  par projection, en notant  $\ell' = \ell + \frac{g}{2}$  :

$$OB'^2 = \left(\vec{OM} + \vec{MB}'\right)^2 = \vec{OM}^2 + \vec{MB}'^2 + 2\vec{OM} \cdot \vec{MB}' = d^2 + \ell'^2 \sin^2 \alpha_m + 2d\ell' \sin \alpha_m \cos \beta \text{ d'où}$$

$$OB' = \sqrt{d^2 + \ell'^2 \sin^2 \alpha_m + 2d\ell' \sin \alpha_m \cos \beta} = 29,8 \text{ m}.$$

En tenant compte de la largeur du bloc (2 m), et de sa rotation probable autour de l'axe du câble, **il va certainement heurter le mur voisin situé à  $D = 30 \text{ m}$** . Il est donc impératif d'appliquer une marge de sécurité d'au moins 10%...