

MÉCANIQUE

I. Points de Lagrange du système Soleil-Terre

a. Mouvement simplifié de la Terre autour du Soleil

1. L'attraction gravitationnelle du Soleil sur la Terre s'écrit

$$\vec{F} = -K \frac{\vec{OT}}{OT^3} \quad \text{avec} \quad K = \mathcal{G}M_S M_T.$$

On applique le Théorème du Moment Cinétique (TMC) au point O fixe dans le référentiel \mathcal{R} galiléen, au système Terre :

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{OT} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\sigma}(O) = \vec{OT} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{\text{constante}} \quad \text{avec} \quad \vec{v}$$

la vitesse de T dans \mathcal{R} . Par conséquent à tout instant le vecteur \vec{OT} est orthogonal au moment cinétique constant $\vec{\sigma}(O)$ donc **le mouvement est inclus dans le plan passant par O orthogonal à $\vec{\sigma}(O)$.**

2. On applique le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) à la Terre dans \mathcal{R} pour un mouvement circulaire, dans la base polaire du plan du mouvement. Pour un mouvement circulaire de rayon $r = OT = d$, on obtient selon \vec{u}_r :

$$-M_T d\Omega^2 = -\frac{\mathcal{G}M_S M_T}{d^2} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{d^3}}.$$

On voit que nécessairement Ω est constante puisqu'elle ne dépend que de constantes. **Le mouvement circulaire est donc uniforme.**

b. Stabilité de l'orbite terrestre

3. Le travail élémentaire s'écrit

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OT} = -K \frac{\vec{OT}}{OT^3} \cdot (dr\vec{u}_r + r d\vec{u}_r) = -\frac{K}{r^2} dr$$

car $\vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r = 0$ étant donné que \vec{u}_r est de norme constante. On en déduit

$$\delta W = -dE_p \quad \text{avec} \quad \left[E_p = -\frac{K}{r} \right],$$

en prenant par convention une énergie potentielle nulle à l'infini.

4. Comme montré en ??, le moment cinétique en O

$$\vec{\sigma}(O) = r\vec{u}_r \wedge M_T(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = M_T r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

est constant, donc la **vitesse aréolaire** $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ est constante. Ainsi, au cours de son mouvement autour du Soleil, **le vecteur position de la Terre \vec{OT} balaie des aires égales pendant des durées égales.** On note $[C = r^2 \dot{\theta}]$ la constante des aires.

D'après les données du problème, à l'instant initial $r = d$ et $\dot{\theta} = \Omega$, donc $[C = d^2 \Omega]$.

5. La force gravitationnelle étant conservative, l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2} M_T (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{K}{r}$$

est constante. En injectant la seconde intégrale première du mouvement $C = r^2 \dot{\theta}$ dans cette équation, on obtient

$$E_m = \frac{1}{2} M_T \dot{r}^2 + E_{p\text{eff}}(r) = \text{constante} \quad \text{avec} \quad \left[E_{p\text{eff}}(r) = \frac{M_T C^2}{2r^2} - \frac{K}{r} \right].$$

Ainsi, la Terre est assimilable à un point matériel ayant un seul degré de liberté r , et évoluant dans un champ de force conservative d'énergie potentielle $E_{p\text{eff}}(r)$.

6. On trace ci-contre l'allure de $E_{p\text{eff}}(r)$ et des deux termes la constituant (cf ci-contre, $E_{p\text{eff}}(r)$ en trait gras), qui fait apparaître un puits de potentiel de minimum (r_0, E_0) , entre deux barrières vérifiant

$$E_{p\text{eff}}(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty \quad \text{et} \quad E_{p\text{eff}}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Comme la vitesse initiale \vec{v}_0 est très légèrement supérieure en norme à celle correspondant à la trajectoire circulaire de référence, qui est un état lié, on en déduit que l'on a toujours un état lié, c'est-à-dire $[E_0 < E_m < 0]$. Or

$$E_m = \frac{1}{2} M_T \dot{r}^2 + E_{p\text{eff}}(r) \geq E_{p\text{eff}}(r),$$

donc on a nécessairement

$$r \in [r_m; r_M] \quad \text{avec} \quad E_{p\text{eff}}(r_m, r_M) = E_m,$$

c'est-à-dire que **le mouvement de T est borné, inscrit entre deux cercles de rayons r_m et r_M .**

7. En dehors des positions vérifiant $r = r_m$ ou $r = r_M$, telles que $\dot{r} \neq 0$, on a forcément $\dot{r} \neq 0$ et donc la Terre voit sa distance r osciller autour de r_0 entre les valeurs extrêmes r_m et r_M . Le minimum vérifie

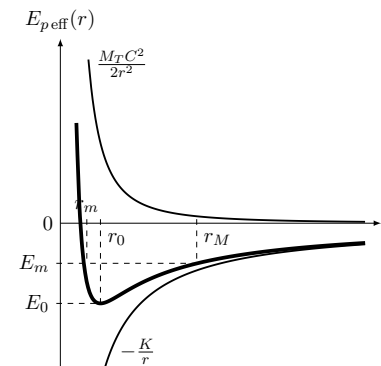
$$\frac{dE_{p\text{eff}}}{dr}(r_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{M_T C^2}{r_0^3} + \frac{K}{r_0^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_0 = \frac{M_T C^2}{K} = \frac{M_T d^4 \Omega^2}{\mathcal{G}M_S M_T} = \frac{d^4 \mathcal{G}M_S}{\mathcal{G}M_S d^3} = d,$$

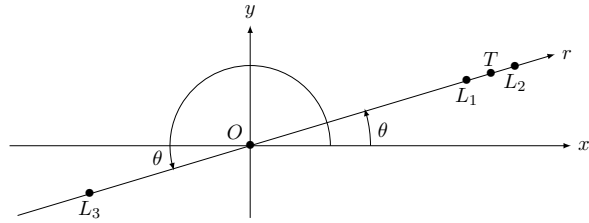
où l'on a réutilisé les résultats trouvés en ?? puis ?? Ainsi **le minimum (r_0, E_0) autour duquel la Terre oscille correspond à la trajectoire de référence $r = d$ et $\dot{\theta} = \frac{C}{d^2} = \Omega$.** On en déduit que la trajectoire de la Terre reste à proximité de la trajectoire de référence circulaire uniforme calculée en ??. **Cette dernière peut donc être considérée stable vis à vis d'une petite perturbation de vitesse¹.**

c. Équations des points de Lagrange

8. On illustre le problème ci-dessous en tenant compte des définitions de l'énoncé. L'angle θ est représenté de deux façons différentes, selon que M se situe du côté de T ou de l'autre.

1. Remarque : si l'on avait seulement modifié la direction de la vitesse \vec{v}_0 sans en changer la norme, alors le minimum de $E_{p\text{eff}}(r)$ serait une autre trajectoire circulaire uniforme un peu différente. Toutefois cela ne changerait pas fondamentalement les choses : la trajectoire perturbée reste approximativement circulaire. Nous savons par ailleurs d'après le cours sur le problème Newtonien que cette trajectoire est en fait elliptique.





Sachant que le point M reste sur l'axe OT , il évolue avec la même vitesse angulaire :

$$\omega = \dot{\theta} = \Omega = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{d^3}}$$

Le point $M = L_2$ a un mouvement circulaire uniforme à la distance r_2 , donc le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au point M dans \mathcal{R} galiléen s'écrit selon \vec{u}_r :

$$-mr_2\Omega^2 = -\frac{\mathcal{G}M_S m}{r_2^2} - \frac{\mathcal{G}M_T m}{(r_2 - d)^2} \Leftrightarrow r_2\Omega^2 - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_2^2} - \frac{\mathcal{G}M_T}{(r_2 - d)^2} = 0 \quad (1)$$

9. Compte-tenu des positions de L_1 et L_3 repérées ci-dessus, il faut changer certains signes pour le sens des forces et les distances :

$$r_1\Omega^2 - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_1^2} + \frac{\mathcal{G}M_T}{(r_1 - d)^2} = 0 \quad \text{et} \quad r_3\Omega^2 - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_3^2} - \frac{\mathcal{G}M_T}{(r_3 + d)^2} = 0$$

REMARQUE : Il est possible de travailler avec le même angle θ pour les trois points de Lagrange, et alors de considérer $r_3 < 0$, ce qui conduirait plutôt à

$$r_3\Omega^2 + \frac{\mathcal{G}M_S}{r_3^2} + \frac{\mathcal{G}M_T}{(r_3 - d)^2} = 0$$

forme qui a l'avantage de ne pas induire de changement dans l'écriture des distances. *On gardera cette convention ci-dessous pour pouvoir obtenir les 3 positions avec une même expression de l'énergie potentielle.*

d. Analyse des solutions

10. Le travail élémentaire s'écrit

$$\delta W = m\Omega^2 \vec{r} \cdot d\vec{r} = m\Omega^2 r \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\vec{u}_r) = m\Omega^2 r dr = -dE_{pc} \quad \text{avec} \quad E_{pc}(r) = -\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2$$

La force est donc conservative, c'est-à-dire dérive d'une énergie potentielle, une fonction de la position uniquement.

11. Les autres énergies potentielles associées à l'attraction gravitationnelle du Soleil et de la Terre ne sont pas modifiées par le changement de référentiel, ce qui donne en réutilisant la forme trouvée en ?? :

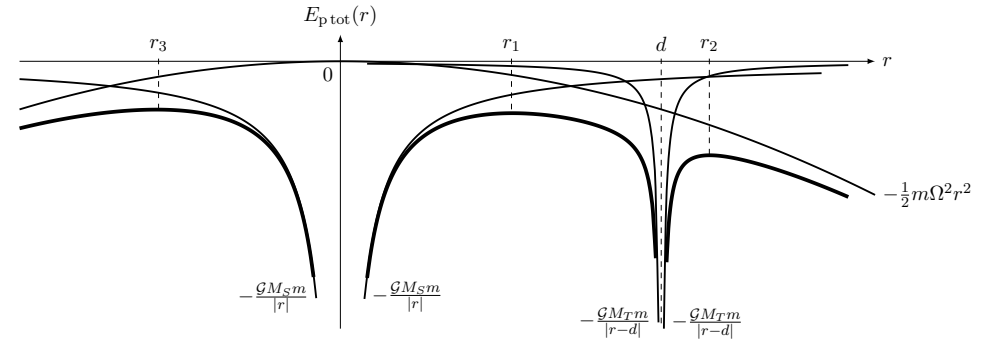
$$E_{p\text{tot}}(r) = -\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2 - \frac{\mathcal{G}M_S m}{|r|} - \frac{\mathcal{G}M_T m}{|r - d|}$$

REMARQUE : Dans le cas où l'on se restreint à $r > 0$, cette expression doit être remplacée pour le point L_3 par

$$E_{p\text{tot}}(r) = -\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2 - \frac{\mathcal{G}M_S m}{r} - \frac{\mathcal{G}M_T m}{r + d}$$

ce qui n'est pas pratique. *Dans la suite nous considérons donc que r peut être négatif, de sorte que l'on garde comme unique expression la précédente.*

12. On obtient les allures suivantes (contributions individuelles en traits fin, et $E_{p\text{tot}}(r)$ en trait épais, les valeurs numériques réelles n'ont pas été respectées pour la lisibilité).



13. D'après l'allure ci-dessus, il existe trois points stationnaires pour l'énergie potentielle (dérivée nulle) donc **trois positions d'équilibre**, dont une seule pour $r < 0$ correspondant à L_3 (r_3), une entre le Soleil et la Terre correspondant à L_1 (r_1), et une au-delà de la Terre par rapport au Soleil correspondant à L_2 (r_2). Ces positions étant toutes des maxima d'énergie potentielle, ce sont des positions d'équilibre **instables**.

e. Évaluation numérique des racines

14. On utilise $\Omega = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{d^3}}$ dans l'Eq. (??), ce qui conduit à

$$r_2 \frac{\mathcal{G}M_S}{d^3} - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_2^2} - \frac{\mathcal{G}M_T}{(r_2 - d)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{r_2}{d^3} - \frac{1}{r_2^2} - \frac{M_T/M_S}{(r_2 - d)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow u - \frac{1}{u^2} - \frac{q}{(1-u)^2} = 0 \quad \text{avec} \quad q = \frac{M_T}{M_S} \quad \text{et} \quad u = \frac{r_2}{d}$$

15. Cherchons la limite de u lorsque $q = \frac{M_T}{M_S} \rightarrow 0$:

$$(1-u)^2 \left(u - \frac{1}{u^2} \right) = q \xrightarrow{q \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \left[u \xrightarrow{q \rightarrow 0} 1 \Leftrightarrow r_2 \xrightarrow{q \rightarrow 0} d \right]$$

Ainsi le point L_2 est d'autant plus proche de la Terre que celle-ci est légère par rapport au Soleil.

16. En posant $u = 1 + \varepsilon$ on obtient

$$f(\varepsilon) = 0 \quad \text{avec} \quad f(\varepsilon) = 1 + \varepsilon - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{q}{\varepsilon^2}$$

On linéarise la partie qui peut l'être, ce qui donne pour $\varepsilon \ll 1$:

$$f(\varepsilon) \approx 1 + \varepsilon - 1 + 2\varepsilon - \frac{q}{\varepsilon^2} = 3\varepsilon - \frac{q}{\varepsilon^2} \quad \text{d'où} \quad f(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \left[\varepsilon \approx \left(\frac{q}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow r_2 \approx d \left(1 + \left(\frac{q}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \right]$$

17. On suppose que les constantes M_T et M_S sont connues. Vu que $\varepsilon \approx 0,01$, une précision relative de 10^{-3} requiert d'**accéder au 4ème chiffre significatif**.

On sait que l'algorithme de dichotomie permet de gagner un chiffre significatif par itération en binaire, donc **approximativement 1 chiffres significatif en 3 itérations en décimal**. Cela nécessitera donc **approximativement 9 itérations**, selon le choix d'initialisation qui est fait.

REMARQUE : En effet la propriété précédente repose sur le fait qu'on peut majorer l'écart de la racine approchée à sa valeur exacte par la longueur de l'intervalle courant $[a_n; b_n]$, qui est lui-même divisé par 2 à chaque itération :

$$|c_n - \varepsilon| \leq |b_n - a_n| = \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}$$

On peut donc atteindre une précision meilleure que p si

$$|b_n - a_n| \leq p \Leftrightarrow \frac{|b_0 - a_0|}{p} \leq 2^n \Leftrightarrow n \geq \frac{\log(|b_0 - a_0|) - \log(p)}{\log(2)} \approx \frac{\log(|b_0 - a_0|)}{\log(2)} - 3,3 \times \log(p).$$

```

1 import numpy as np
2
3 # Données supposées connues (variables globales pour les fonctions)
4 MS, MT = 1.989e30, 5.973e24
5 q = MT/MS
6
7 def f(x):
8     """fonction dont la racine est l'écart adimensionné de L2 par rapport
9     a la Terre: x = r2 / d - 1 """
10    return 1+x - 1/(1+x)**2 - q/x**2
11
12 def dichotomie(f,a,b,prec):
13    '''Calcule la racine de f(x) = 0 sur [a,b] par dichotomie
14    avec une précision relative de l'ordre de prec.'''
15    if (a>=b): return 'Attention : a<b_demande.'
16    n = 0 # indice de nombre d'itérations
17    c = (a+b)/2
18    while (abs(a-b) > prec*c and n < 500): # critère de sortie double
19        if f(c)*f(a) < 0 : # signes différent / borne gauche
20            b = c
21        else: # signes identiques / borne gauche
22            a = c
23        c = (a+b)/2 # milieu de l'intervalle courant
24        n += 1
25    return c,n # racine, nb itérations
26
27 eps,n = dichotomie(f,0.005,0.015,1e-3)
28 print('eps, ueps_th, un=u', eps, (q/3)**(1/3), n)

```

L'exécution du programme ci-dessus renvoie

```
>>>
eps, eps_th, n = 0.010034179687500002 0.010003350645249903 10
```

On constate que la valeur obtenue par calcul analytique approché était valable jusqu'au 3^e chiffre significatif inclus, donc à 10^{-2} près.

f. Évaluation du temps caractéristique en L_2

18. Le mouvement dans \mathcal{R} n'étant plus circulaire, mais toujours selon \vec{u}_r , on remplace l'accélération par : $\ddot{r} - r\Omega^2 = \ddot{x} - (r_2 + x)\Omega$ dans l'Eq. (??), ce qui donne

$$\ddot{x} = (r_2 + x)\Omega^2 - \frac{\mathcal{G}M_S}{(r_2 + x)^2} - \frac{\mathcal{G}M_T}{(r_2 + x - d)^2}.$$

En linéarisant, on obtient

$$\ddot{x} = \underbrace{r_2\Omega^2 - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_2^2} - \frac{\mathcal{G}M_T}{(r_2 - d)^2}}_{=0} + x\Omega^2 + \frac{2\mathcal{G}M_S}{r_2^3}x + \frac{2\mathcal{G}M_T}{(r_2 - d)^3}x = \Omega^2 \left(1 + \frac{2d^3}{r_2^3} + \frac{2M_T/M_S d^3}{(r_2 - d)^3} \right) x$$

toujours en utilisant que $\Omega^2 = \frac{\mathcal{G}M_S}{d^3}$. On en déduit que

$$\ddot{x} = \Omega^2 k x \quad \text{avec} \quad k = 1 + \frac{2}{u^3} + \frac{2q}{(u-1)^3} \quad \text{et} \quad q = \frac{M_T}{M_S}.$$

19. On cherche des solutions sous la forme $e^{\lambda t}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique

$$\lambda^2 = \Omega^2 k > 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{\Omega \sqrt{k}}.$$

La solution générale s'écrit donc sous la forme

$$x(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + B e^{\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}.$$

Ainsi il s'agit d'une solution divergente ($x \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$), dont le temps caractéristique d'éloignement vaut

$$\tau = \frac{T_T}{2\pi \sqrt{k}} \quad \text{avec} \quad T_T \approx 365 \text{ j}$$

la période de révolution de la Terre autour du Soleil.

20. On évalue k en notant que $u \approx 1,01$ et $q \approx 3 \times 10^{-6}$, ce qui donne

$$k \approx 1 + 2 + \frac{2 \times 3 \times 10^{-6}}{10^{-2 \times 3}} \approx 9 \quad \text{d'où} \quad \tau \approx \frac{365}{2 \times 3 \times 3} \approx 20 \text{ jours}.$$

Concrètement, l'écart par rapport à la position d'équilibre sera multiplié par $e \approx 2,7$ tous les 20 jours. Il faut donc intervenir pour corriger la trajectoire selon une échelle de temps de l'ordre de quelques jours.