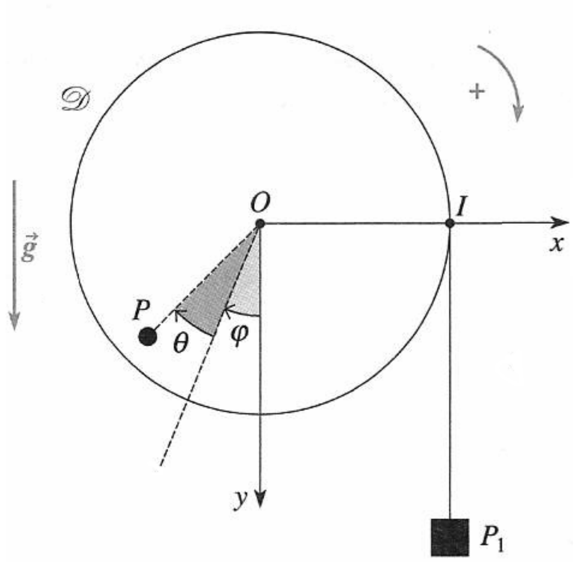
# MÉCANIQUE

**CALCULATRICES AUTORISÉES**

## I. Oscillations d'une poulie

On considère un système constitué d'une poulie homogène $\mathscr{D}$ de rayon $R$ et de masse $M$, de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}MR^2$, d'une masse $m_1$ accrochée à l'extrémité $P_1$ d'un fil souple inextensible enroulé et attaché à la poulie, et une masse additionnelle $m$ ponctuelle soudée en $P$ à la distance $r$ de l'axe de la poulie.
La poulie est astreinte à tourner autour de l'axe $O_z$ horizontal fixe dans le référentiel d'étude, supposé galiléen.
On suppose que tous les mouvements de rotation s'effectuent sans frottements (liaison pivot parfaite), et que le fil est de masse négligeable.
On désigne par $\mathscr{S}$ le système complet ainsi constitué des masses $m$ et $m_1$, et de la poulie $\mathscr{D}$. On note $g$ l'intensité du champ de pesanteur.




**1.** En appliquant le Théorème du Moment Cinétique, établir une condition reliant les masses $m_1$ et $m$ nécessaire pour qu'il existe une ou plusieurs position(s) d'équilibre définie par l'angle $\varphi = (\vec{e}_y, \overrightarrow{OP})$. Donner l'expression de cette/ces position(s) d'équilibre.

*Dans la suite, on considérera cette condition vérifiée.*

**2.** À partir de l'une de ces positions d'équilibre, on fait tourner la poulie d'un angle $\theta$ de telle sorte que l'on ait $\theta + \varphi = (\vec{e}_y, \overrightarrow{OP})$ (cf schéma).

**a)** Exprimer le moment cinétique total de $\mathscr{S}$ par rapport à $Oz$, en fonction de la coordonnée $\theta(t)$ uniquement, et des paramètres $m$, $m_1$, $r$ et $R$.

**b)** En déduire l'équation différentielle en $\theta(t)$ régissant le mouvement.

**3.** On considère dans cette question que $|\theta| \ll 1$, de telle sorte que l'on peut linéariser les équations précédentes.

**a)** Établir une condition pour que la position d'équilibre $\varphi$ soit stable ou instable. On pensera à exploiter la relation d'équilibre trouvée en **1.**.

**b)** On se place dans le cas stable. Exprimer la pulsation $\omega_0$ des petites oscillations au voisinage de $\theta = 0$ en fonction de $\varphi$ et des paramètres nécessaires.
Exprimer $\theta(t)$ pour les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

**c)** Calculer la période $T_0$ du mouvement précédent pour $R = 0,50\,\text{m}$, $r = 0,25\,\text{m}$, $M = 1,0\,\text{kg}$, $4m_1 = m = 0,050\,\text{kg}$ et $g = 9,81\,\text{m.s}^{-2}$.

**4.** On abandonne l'hypothèse des mouvements de petite amplitude.

**a)** Etablir l'intégrale première de l'énergie, en explicitant l'énergie cinétique totale $E_{c\mathscr{S}}$ et l'énergie potentielle totale $E_p$ en fonction de la coordonnée $\theta(t)$ uniquement, de $\varphi$ et des constantes nécessaires. On imposera arbitrairement $E_p(\theta = 0) = 0$.

**b)** Représenter l'allure de la fonction $E_p(\theta)$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

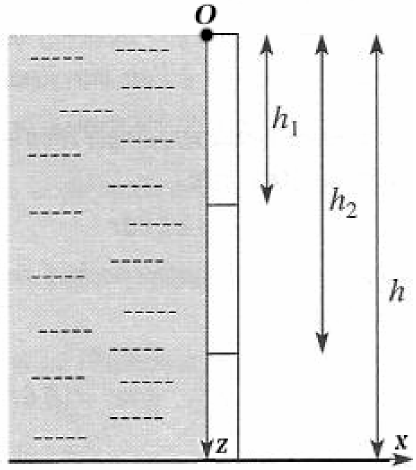
**c)** Le système est abandonné sans vitesse initiale à partir de la position $\theta_0$. Indiquer dans quel intervalle $[\theta_2; \theta_1]$ doit se situer $\theta_0$ pour permettre un mouvement oscillatoire de $\mathcal{S}$. Expliciter $\theta_1$ littéralement puis numériquement (en degré). Déterminer numériquement $\theta_2$ par une résolution numérique à la calculatrice.

## II. Poussée et centres de poussée sur un mur de barrage

Un mur de barrage de hauteur totale $h$ et de largeur $L$ est constitué de trois éléments de hauteur respective $h_1$, $h_2 - h_1$ et $h - h_2$. On considère que l'eau affleure au sommet $(z = 0)$, et que l'air atmosphérique en contact avec la partie droite et supérieure est de pression uniforme $P_0$. On note $\rho$ la masse volumique de l'eau, supposée incompressible et homogène. On note $g$ la norme du champ de pesanteur.

**1.** Exprimer le champ de pression $P(z)$ dans l'eau.

**2.** Calculer les trois résultantes $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ des forces de pression horizontales s'appliquant sur les trois éléments (de haut en bas).




**3.** Comment choisir les hauteurs $h_1$ et $h_2$ en fonction de $h$ de sorte que ces trois forces soient égales ?
*On considère dorénavant cette condition vérifiée.*

**4.** Calculer les moments résultants des forces de pression $\vec{\mathcal{M}}_1(O)$, $\vec{\mathcal{M}}_2(O)$ et $\vec{\mathcal{M}}_3(O)$ sur les trois éléments, en considérant $O$ au milieu du barrage par rapport à la largeur selon $\vec{u}_y$.

**5.** En déduire la position sur l'axe $Oz$ des centres de poussée (ou points d'application) respectifs $C_1$, $C_2$ et $C_3$, des forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$.

* * * Fin de l'épreuve * * *