

MÉCANIQUE

I. Oscillations d'une poulie

1. Le Théorème du Moment Cinétique (TMC) scalaire par rapport à l'axe Oz dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} supposée galiléen s'écrit à l'équilibre :

$$0 = \vec{u}_z \cdot (\vec{OP} \wedge m\vec{g} + \vec{OP}_1 \wedge m_1\vec{g}) + \mathcal{M}_{\text{pivot}}^{Oz} = -mgr \sin \varphi + m_1gR + 0 \Leftrightarrow \boxed{\sin \varphi = \frac{m_1R}{mr}}.$$

En effet la poulie étant homogène, son centre de masse est situé sur Oz donc le moment résultant scalaire du poids de la poulie est nul. D'autre part la liaison pivot est parfaite donc son moment selon \vec{u}_z est nul. On remarque que nécessairement $\boxed{\varphi \in [0; \pi]}$.

Comme $\sin \varphi \leq 1$ ceci implique la condition d'existence d'un équilibre

$$\boxed{m_1R \leq mr}.$$

On a explicitement les deux positions suivantes :

$$\boxed{\varphi = \arcsin\left(\frac{m_1R}{mr}\right) \in [0; \frac{\pi}{2}]} \text{ et } \boxed{\varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{m_1R}{mr}\right) \in [\frac{\pi}{2}; \pi]}.$$

2. a) Le moment cinétique total de \mathcal{S} par rapport à Oz dans \mathcal{R} est la somme de trois contributions. En introduisant la base polaire $(\vec{u}_r; \vec{u}_\theta)$ pour décrire le mouvement circulaire de P , on a $\vec{OP} = r\vec{u}_r$ et sa vitesse vaut $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. Le point P_1 , situé à l'ordonnée y , a un mouvement rectiligne de vitesse $\vec{v}_1 = \dot{y}\vec{u}_y$.

$$\sigma_{\mathcal{S}}^{Oz} = \sigma_{\mathcal{P}}^{Oz} + \sigma_P^{Oz} + \sigma_{P_1}^{Oz} = J\dot{\theta} + \vec{u}_z \cdot (\vec{OP} \wedge mr\dot{\theta}\vec{u}_\theta + (\vec{OI} + \vec{IP}_1) \wedge m_1\dot{y}\vec{u}_y) = J\dot{\theta} + mr^2\dot{\theta} + m_1R\dot{y}.$$

En exploitant $J = \frac{1}{2}MR^2$ et l'inextensibilité du fil (qui ne glisse pas car il est accroché à la poulie), on en déduit que

$$\dot{y} = R\dot{\theta} \text{ et donc } \boxed{\sigma_{\mathcal{S}}^{Oz} = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2 + m_1R^2\right) \dot{\theta}}.$$

- b) Le TMC scalaire en situation de mouvement s'écrit en remplaçant φ par $\varphi + \theta$ dans le moment résultant trouvé en 1., donc

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2 + m_1R^2\right) \ddot{\theta} = -mgr \sin(\varphi + \theta) + m_1gR}.$$

3. a) Pour linéariser le second membre de l'équation différentielle du mouvement, on écrit $\sin \theta \approx \theta$ et $\cos \theta \approx 1$:

$$\begin{aligned} -mgr \sin(\varphi + \theta) + m_1gR &= -mgr(\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta) + m_1gR \\ &\approx -mgr \cos(\varphi) \theta + m_1gR - mgr \sin(\varphi) \\ &= -mgr \cos(\varphi) \theta \end{aligned}$$

car la condition d'équilibre s'écrit $mr \sin \varphi = m_1R$. Ainsi, l'équation du mouvement pour $|\theta| \ll 1$ s'écrit

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2 + m_1R^2\right) \ddot{\theta} \approx -mgr \cos(\varphi) \theta$$

Si on lâche le système sans vitesse initiale, au voisinage de la position d'équilibre φ , celle-ci est stable à condition que le moment résultant ramène le système vers φ . Ainsi, si

$$\theta > 0 \text{ il faut } -mgr \cos(\varphi) < 0 \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

On aura alors aussi un effet de rappel si $\theta < 0$ car alors $-mgr \cos(\varphi)\theta > 0$.

Pour résumer, la position $\boxed{\varphi = \arcsin\left(\frac{m_1R}{mr}\right) \in [0; \frac{\pi}{2}]}$ est un **équilibre stable**, alors que la position

$\boxed{\varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{m_1R}{mr}\right) \in [\frac{\pi}{2}; \pi]}$ est un **équilibre instable**.

- b) D'après l'expression ci-dessus, on obtient pour $|\theta| \ll 1$ un oscillateur harmonique dans le cas où la position φ est stable ($\cos \varphi > 0$) :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ avec } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr \cos \varphi}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2 + m_1R^2}}}.$$

La solution générale s'écrit $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Les conditions initiales imposent $A = \theta_0$ et $B\omega_0 = \dot{\theta}(0) = 0$ d'où $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$.

- c) On obtient $\boxed{\varphi = \arcsin\left(\frac{m_1R}{mr}\right) = 30^\circ}$ et $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2 + m_1R^2}{mgr \cos \varphi}} = 7,0 \text{ s}}$.

4. a) Le système est conservatif car la liaison pivot est parfaite, le fil est inextensible et ne glisse pas, et donc seules les forces de pesanteur travaillent, et elles sont conservatives. Le théorème de la puissance cinétique dans \mathcal{R} s'écrit

$$\frac{dE_{c\mathcal{S}}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{pes}} = -\frac{dE_p}{dt} \Leftrightarrow \boxed{E_{c\mathcal{S}} + E_p = \text{constante}},$$

avec E_p l'énergie potentielle de pesanteur totale. On l'obtient en sommant les énergies potentielles des deux masses ponctuelles (celle de la poulie ne varie pas donc elle peut être omise) :

$$E_p = -mgr \cos(\varphi + \theta) - m_1gy.$$

Comme $\dot{y} = R\dot{\theta}$ on peut écrire $y = R\theta + y_0$ avec y_0 une constante qui peut être choisie arbitrairement puisque E_p est définie à une constante près. Ainsi

$$\boxed{E_p(\theta) = -mgr \cos(\varphi + \theta) - m_1gR\theta - m_1gy_0} \text{ en posant } \boxed{E_p(\theta = 0) = -mgr \cos(\varphi) - m_1gy_0 = 0}.$$

Quant à l'énergie cinétique, elle se décompose en trois contributions :

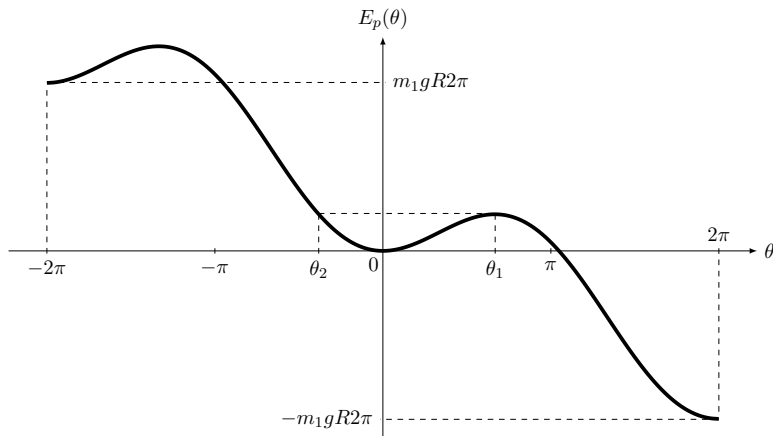
$$E_{c\mathcal{S}} = E_{c\mathcal{P}} + E_{cP} + E_{cP_1} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2.$$

De nouveau en injectant $J = \frac{1}{2}MR^2$ et $\dot{y} = R\dot{\theta}$ on obtient

$$\boxed{E_{c\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \left(MR^2 + mr^2 + m_1R^2 \right) \dot{\theta}^2}.$$

REMARQUE : Cette intégrale première s'obtient plus rapidement en multipliant par $\dot{\theta}$ l'équation du TMC puis en l'intégrant.

- b) La fonction $E_p(\theta)$ est la somme d'une fonction $-\cos$ traduite de sorte à avoir son minimum en $\theta = -\varphi$, et d'une fonction affine décroissante en θ . Cela donne une allure de $-\cos$ incliné vers le bas de gauche à droite, avec un **minimum local situé en $\theta = 0$ puisqu'il s'agit d'une position d'équilibre stable**. De plus on peut noter qu'en raison de la 2π -périodicité du \cos , l'allure sur $[0, 2\pi]$ s'obtient par translation vers le bas d'une quantité $-m_1gR2\pi$ de la partie gauche sur $[-2\pi, 0]$.



c) Comme $\dot{\theta}^2 \geq 0$, on forcément

$$E_p(\theta) \leq E_m \quad \text{avec} \quad E_m = E_p(\theta_0) \quad \text{car} \quad \dot{\theta}(0) = 0.$$

Notons θ_1 le maximum de E_p situé sur $[0; \pi]$ (cf figure ci-dessus), et θ_2 l'unique valeur sur $[-\pi; 0]$ telle que $E_p(\theta_2) = E_p(\theta_1)$. D'après la propriété ci-dessus, **le mouvement sera borné et oscillatoire dans le puits de potentiel autour de $\theta = 0$ si $\theta_0 \in [\theta_2; \theta_1]$. Il sera non borné en θ dans le cas contraire.** Pour trouver θ_1 , on dérive E_p par rapport à θ :

$$\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad mgr \sin(\varphi + \theta_1) - m_1gR = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi + \theta_1 = \arcsin\left(\frac{m_1R}{mr}\right) = \varphi \quad \text{ou} \quad \varphi + \theta_1 = \pi - \arcsin\left(\frac{m_1R}{mr}\right) = \pi - \varphi.$$

La première solution ci-dessus correspond en fait à $\theta_1 = 0$ c'est-à-dire à la position d'équilibre stable. On retient donc l'autre solution, qui correspond en fait à la position d'équilibre instable trouvée au **3.a)**. On a donc

$$\theta_1 = \pi - 2\varphi = \pi - 2 \arcsin\left(\frac{m_1R}{mr}\right) = \underline{120^\circ}.$$

On en déduit $E_p(\theta_2) = E_p(\theta_1)$ c'est-à-dire

$$-mgr \cos(\varphi + \theta_2) - m_1gR\theta_2 - m_1gy_0 = -mgr \cos(\varphi + \theta_1) - m_1gR\theta_1 - m_1gy_0$$

$$\Leftrightarrow \quad -mgr \cos(\varphi + \theta_2) - m_1gR\theta_2 = -mgr \cos(\pi - \varphi) - m_1gR\theta_1$$

$$\Leftrightarrow \quad f(\theta_2) = -\cos(\varphi + \theta_2) - \frac{m_1R}{mr}\theta_2 = \cos(\varphi) - \frac{m_1R}{mr}\theta_1 = \underline{-0,181}.$$

En appliquant sous Python les lignes de code suivantes,

```
from scipy.optimize import fsolve
ftheta2 = np.cos(phi) - m1*R/m/r*theta1
def f(x):
    return -np.cos(phi+x) - m1*R/m/r*x - ftheta2
theta2 = fsolve(f,-1)
```

on obtient $\theta_2 = -69^\circ$.

II. Poussée et centres de poussée sur un mur de barrage

1. L'équation de la statique des fluides avec un axe descendant s'écrit

$$\frac{dP}{dz} = \rho g \quad \text{ce qui s'intègre en} \quad \boxed{P(z) = P_0 + \rho gz},$$

en considérant que l'eau est incompressible et homogène, et en appliquant la continuité de la pression au niveau de l'interface avec l'air.

2. Comme la pression dépend de z , on découpe chaque élément de mur en tranches infinitésimales de largeur L et de hauteur dz . On retranche la force de l'air à droite (dirigée selon $-\vec{u}_x$) à la force de l'eau (dirigée selon \vec{u}_x). Sur le premier élément on a donc

$$\vec{F}_1 = \int_0^{h_1} (P(z) - P_0)L dz \vec{u}_x = L\rho g \vec{u}_x \int_0^{h_1} z dz \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{F}_1 = g\rho L \frac{h_1^2}{2} \vec{u}_x}.$$

En adaptant les bornes d'intégration on trouve de même

$$\boxed{\vec{F}_2 = g\rho L \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} \vec{u}_x} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{F}_3 = g\rho L \frac{h^2 - h_2^2}{2} \vec{u}_x}.$$

3. Les trois forces sont égales si

$$\begin{cases} h_1^2 = h_2^2 - h_1^2 \\ h_2^2 - h_1^2 = h^2 - h_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{h_1 = \frac{h}{\sqrt{3}}} \quad \text{et} \quad \boxed{h_2 = \frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}}}.$$

4. On repart cette fois d'une intégrale double, le point M parcourant la surface :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_1(O) &= \int_{z=0}^{h_1} \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{OM} \wedge (P(z) - P_0) dy dz \vec{u}_x = g\rho \int_{z=0}^{h_1} \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (y\vec{u}_y + z\vec{u}_z) \wedge z dy dz \vec{u}_x \\ &= g\rho \left(\int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} -y dy \cdot \int_{z=0}^{h_1} z dz \vec{u}_z + \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \cdot \int_{z=0}^{h_1} z^2 dz \vec{u}_y \right) = g\rho \left(\vec{0} + L \cdot \frac{h_1^3}{3} \vec{u}_y \right) \quad \text{d'où} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_1(O) = g\rho L \frac{h_1^3}{3} \vec{u}_y} \quad \text{et de même} \quad \boxed{\vec{\mathcal{M}}_2(O) = g\rho L \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} \vec{u}_y} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\mathcal{M}}_3(O) = g\rho L \frac{h^3 - h_2^3}{3} \vec{u}_y}.$$

5. Le point d'application C_1 de coordonnées $(x_1 = 0, y_1, z_1)$ est défini par

$$\vec{\mathcal{M}}_1(O) = \vec{OC}_1 \wedge \vec{F}_1 = (y_1\vec{u}_y + z_1\vec{u}_z) \wedge \vec{F}_1 = (-y_1\vec{u}_z + z_1\vec{u}_y) F_1 \Rightarrow \boxed{y_1 = 0 \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{2}{3}h_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}h}.$$

$$\text{De même on trouve après simplification} \quad \boxed{y_2 = y_3 = 0}, \quad \boxed{z_2 = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{3}}h} \quad \text{et} \quad \boxed{z_3 = \frac{2(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{3\sqrt{3}}h}.$$