

THERMODYNAMIQUE

I. Chauffage d'un gaz parfait

1. Dans les conditions ambiantes, une molécule diatomique a son degré de liberté vibrationnel gelé, de telle sorte que seuls trois termes quadratiques de translation et deux de rotation propre contribuent à son énergie cinétique E_{ci} . Le gaz étant parfait il n'y a pas d'énergie potentielle d'interaction intermoléculaire. Pour un gaz parfait constitué de n moles de gaz, soit N molécules, le théorème d'équipartition conduit à l'énergie interne

$$U = \sum_{i=1}^N E_{ci} = N \langle E_{ci} \rangle = N \frac{5}{2} k_B T = \frac{5}{2} nRT.$$

Quant à l'enthalpie du gaz parfait elle vérifie

$$H = U + PV = U + nRT = \frac{7}{2} nRT.$$

On en déduit les capacités thermiques à volume et pression constantes, ainsi que leur rapport γ :

$$C_V = \frac{5}{2} nR \quad , \quad C_P = \frac{7}{2} nR \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma = \frac{7}{5}} = 1,4.$$

2. En appliquant le Théorème de la Résultante Cinétique au piston dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on obtient à l'équilibre, en l'absence de frottement, et en projection selon \vec{u}_x (horizontal) :

$$0 = P\sigma - P_0\sigma + k(\ell - \ell_0) \quad \Leftrightarrow \quad P = P_0 - \frac{k}{\sigma}(\ell - \ell_0)$$

avec ℓ la longueur du ressort pour le piston en x . À l'état initial, on a $x = 0$ et

$$P = P_0 = P_0 - \frac{k}{\sigma}(\ell - \ell_0) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ell(x=0) = \ell_0}.$$

On en déduit que $\ell - \ell_0 = -x$, et ainsi on a

$$\boxed{P(x) = P_0 + \frac{k}{\sigma} x}.$$

3. L'état final est défini par $P_F = 2P_0$ d'où $\boxed{x_F = \frac{\sigma P_0}{k}} = 20 \text{ cm}$. On en déduit

$$V_F = V_0 + \sigma x_F \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_F = \frac{nRT_0}{P_0} + \frac{\sigma^2 P_0}{k}} = 34 \text{ L} \quad \text{et}$$

$$T_F = \frac{P_F V_F}{nR} \quad \text{d'où} \quad \boxed{T_F = 2T_0 + \frac{2\sigma^2 P_0^2}{nRk}} = 8,2 \times 10^2 \text{ K}.$$

4. La transformation étant mécaniquement quasi-statique, on peut écrire le travail des forces de pression reçu par le gaz dans le compartiment de gauche comme

$$W = \int_{x=0}^{x=x_F} -P(x)dx = -\sigma \int_0^{x_F} \left(P_0 + \frac{k}{\sigma} x \right) dx \quad \text{d'où} \quad \boxed{W = -P_0 \sigma x_F - \frac{1}{2} k x_F^2 = -\frac{3\sigma^2 P_0^2}{2k}}.$$

5. On applique le Premier Principe au gaz parfait. Il n'y a pas de variation d'énergie cinétique macroscopique car le gaz est au repos, ni de variation d'énergie potentielle de pesanteur car le déplacement est horizontal.

$$\Delta U = W + Q \quad \text{avec} \quad \Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_F - T_0)$$

en vertu de la première loi de Joule pour les gaz parfaits. On en déduit, en réutilisant les précédents résultats, que

$$\boxed{Q = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_F - T_0) + \frac{3\sigma^2 P_0^2}{2k} = \frac{nRT_0}{\gamma - 1} + \frac{\sigma^2 P_0^2}{k} \left(\frac{2}{\gamma - 1} + \frac{3}{2} \right)} = 13 \text{ kJ}.$$

6. Le résistor reçoit la puissance électrique (transfert de type ordonné) et fournit le transfert thermique Q (transfert désordonné en raison de l'effet Joule) au gaz. Ainsi, le Premier Principe appliqué au résistor, qui est un solide supposé incompressible et statique, s'écrit

$$\Delta U_R = UI\Delta t - Q \quad \text{avec} \quad \Delta U_R = C_R(T_F - T_0) \quad \text{d'où} \quad \boxed{C_R = \frac{UI\Delta t - Q}{T_F - T_0}} = 3,0 \text{ J.K}^{-1}.$$

En supposant la loi de Dulong et Petit vérifiée pour le matériau du résistor et la gamme de température considérée, le nombre de moles d'atomes n_R du résistor vérifie

$$C_R \approx 3n_R R \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{n_R \approx \frac{C_R}{3R}} = 0,12 \text{ mol}.$$

7. Considérons le système constitué du résistor et de gaz parfait dans le compartiment de gauche ($\{R + g\}$). Ce système subit une transformation adiabatique, donc le second principe conduit à

$$\Delta S = S_c.$$

On calcule la variation d'entropie sur un chemin réversible, en décomposant par extensivité :

$$\Delta S = \Delta S_R + \Delta S_g.$$

Pour le résistor, qui est un solide incompressible,

$$\Delta S_R = \int_{T_0}^{T_F} \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = C_R \int_{T_0}^{T_F} \frac{dT}{T} = C_R \ln \left(\frac{T_F}{T_0} \right).$$

Pour le gaz parfait on écrit aussi que

$$dS_g = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

puis on utilise le premier principe avec la première loi de Joule, et l'équation d'état,

$$\delta Q_{\text{rev}} = dU - \delta W_{\text{rev}} \quad \text{avec} \quad dU = C_V dT = \frac{nR}{\gamma - 1} dT \quad \text{et} \quad \delta W_{\text{rev}} = -PdV = -\frac{nRT}{V} dV.$$

En intégrant on obtient

$$\Delta S_g = \frac{nR}{\gamma - 1} \left(\int_{T_0}^{T_F} \frac{dT}{T} + \int_{V_0}^{V_F} (\gamma - 1) \frac{dV}{V} \right) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_F V_F^{\gamma-1}}{T_0 V_0^{\gamma-1}} \right) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{P_F V_F^\gamma}{P_0 V_0^\gamma} \right)$$

En réinjectant les expressions de P_F et V_F on a simplement

$$\boxed{S_c = \Delta S = C_R \ln \left(\frac{T_F}{T_0} \right) + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(2 \left(1 + \frac{\sigma^2 P_0^2}{knRT_0} \right)^\gamma \right)} = 28 \text{ J.K}^{-1}.$$