ÉLECTRICITÉ

Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats doivent d'abord être écrits sous forme littérale et doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraisemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Circuit en régime transitoire

On considère le circuit de la figure 1. Les condensateurs C_1 et C_2 ont même capacité C : $C_1 = C_2 = C$; leur numérotation permet de les nommer sans ambiguïté. Le circuit est alimenté par un échelon de tension $e(t)$, d'amplitude E constante :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On suppose que, lors du basculement de e de la valeur 0 à E, le régime permanent était atteint.

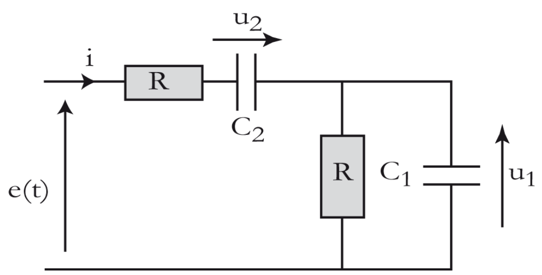

FIGURE 1

1. Faire le schéma équivalent du montage en régime permanent continu (i.e. stationnaire).
Exprimer $u_{1\infty}$ et $u_{2\infty}$, respectivement les tensions u_1 et u_2 pour le régime permanent à $t > 0$, ainsi que $u_{1,0}$ et $u_{2,0}$ respectivement les tensions u_1 et u_2 en régime permanent à $t < 0$.

Étude énergétique de $t = 0^+$ jusqu'à $t \to \infty$.

2. Déterminer les énergies W_{C1} et W_{C2} reçues respectivement par les condensateurs de capacité C_1 puis C_2, depuis $t = 0^+$ jusqu'à $t \to \infty$.

3. Quelle est l'énergie W_G fournie par le générateur de $t = 0^+$ jusqu'à $t \to \infty$?

4. En déduire l'énergie W_{2R} reçue par l'ensemble des deux résistances R de $t = 0^+$ jusqu'à $t \to \infty$.

Évolution de $u_1(t)$ pour $t > 0$.

5. Déterminer, en fonction des données du problème, les expressions de $u_1(0^+)$ et $\frac{du_1}{dt}(0^+)$.

6. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_1(t)$ pour $t > 0$ et la mettre sous la forme

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_1}{dt} + \omega_0^2 u_1 = 0$$

Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction des données du problème. Quels régimes sont possibles avec ce montage ?

7. Tracer sans justification l'allure du graphe $u_1(t)$ en fonction de t pour tout t, en précisant les caractéristiques essentielles de son évolution.

II. Étude en puissance d'un circuit « bouchon »

On considère un dipôle RLC parallèle, excité par un **générateur de courant** sinusoïdal, de pulsation $\omega > 0$ (voir figure 2). Le générateur impose un courant

$$i(t) = I\cos(\omega t)$$

avec I une constante strictement positive.
Au bout d'un temps suffisamment long, il s'établit un régime permanent sinusoïdal. Nous n'étudierons ici que ce régime sinusoïdal forcé.

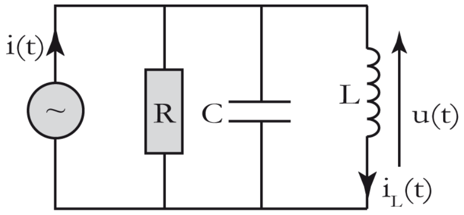

FIGURE 2

On utilisera les grandeurs complexes suivantes, respectivement associées aux intensités $i(t)$ et $i_L(t)$ ainsi qu'à la tension, $u(t)$:

$$\underline{i}(t) = Ie^{j\omega t} \qquad \underline{i_L}(t) = I_L e^{j\psi} e^{j\omega t} = \underline{I_L}\, e^{j\omega t} \qquad \underline{u}(t) = Ue^{j\varphi}e^{j\omega t} = \underline{U}\, e^{j\omega t}$$

1. Donner les significations physiques des grandeurs U, I_L, φ et ψ.

Étude de la réponse en tension aux bornes de l'inductance.

2. Montrer que la grandeur complexe $\underline{U}$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{U} = \frac{R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} I$$

où Q et ω_0 sont des grandeurs que l'on exprimera en fonction de R, L et C.
Note : on ne demande pas ici de passer par l'équation différentielle associée pour déterminer Q *et* ω_0.

On pose dorénavant la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

3. Exprimer U en fonction des paramètres R, I, Q et de la variable x.

4. Montrer qu'il existe une résonance en tension $u(t)$, et indiquer pour quelle pulsation x_r.
Que vaut alors l'amplitude maximale U_{max} de $u(t)$?

5. Déterminer l'expression de $\varphi(x)$. Tracer l'allure de la courbe $\varphi(x)$.

6. Donner l'expression complète de la grandeur réelle $u(t)$.
Que devient cette expression pour $x = x_r$?

Étude de l'intensité circulant dans la bobine.

7. Relier la grandeur complexe $\underline{I_L}$ à $\underline{U}$ puis déterminer l'expression complète de la grandeur réelle $i_L(t)$.
L'intensité i_L est-elle en avance ou en retard de phase par rapport à la tension u ?

8. Exprimer $i_L(t)$ à la pulsation $x = x_r$, uniquement en fonction de Q, I et ω_0.

Puissance reçue par la résistance R.

9. Déterminer la puissance moyenne $\mathcal{P}_R$ dissipée par la résistance. On exprimera le résultat en fonction de U et de R uniquement.

10. Déterminer la pulsation pour laquelle la puissance moyenne reçue par R est maximale. Donner alors l'expression de la puissance reçue $\mathcal{P}_{R_{\max}}$ et l'exprimer en fonction de I_{eff}, intensité efficace de $i(t)$. Interpréter ce résultat.

11. On définit la largeur de la résonance en puissance par

$$\Delta x = |x_2 - x_1| \quad \text{avec} \quad x_1 \text{ et } x_2 \text{ telles que} \quad \mathcal{P}_R(x_{1,2}) = \frac{\mathcal{P}_{R_{\max}}}{2}\,.$$

Montrer que Δx ne dépend que de Q, et expliciter cette relation.

III. Détermination d'une installation inductive

Une installation électrique est alimentée sous une tension efficace $U_{\text{eff}} = 220\,\text{V}$. En régime sinusoïdal forcé, elle consomme une puissance moyenne $\mathcal{P} = 12\,\text{kW}$. La fréquence vaut $f = 50\,\text{Hz}$ et l'intensité efficace $I_{\text{eff}} = 80\,\text{A}$.

Sachant que cette installation est du type inductif, calculer la résistance R et l'inductance propre L qui, placées en série et avec la même alimentation, seraient équivalentes à l'installation. On commencera par montrer que $\mathcal{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi$ où φ est le déphasage entre tension et courant.

IV. Hacheur de Buck

Le but de ce problème est d'étudier le convertisseur de Buck. Il s'agit d'un circuit permettant d'obtenir d'une tension E continue (c'est-à-dire constante), une tension v_S continue multiple de E. Le circuit étudié est donné en Fig. 3.

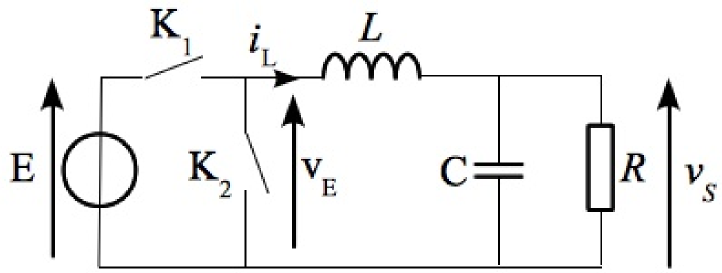

Figure 3 – Hacheur de Buck

Les interrupteurs K_1 et K_2 sont commandés électroniquement pour s'ouvrir périodiquement. On note T la période associée à ces permutations d'état, qui sont telles que, avec $\alpha < 1$:

Phase A : Pour $0 < t < \alpha T$: K_1 est fermé et K_2 est ouvert.

Phase B : Pour $\alpha T < t < T$: K_1 est ouvert et K_2 est fermé.

On considère que le basculement des interrupteurs est instantané. Les bobines et condensateurs sont considérés parfaits. Le générateur de force électromotrice E fournit une tension continue $E = 12\,\mathrm{V}$. On prendra pour les applications numériques $\alpha = 1/3, R = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $L = 0,1\,\mathrm{H}$ et $C = 1\,\mathrm{mF}$.

Pour obtenir une tension approximativement continue en sortie, on doit choisir une valeur de C telle que

$$RC \gg \frac{L}{R} \tag{1}$$

Cette hypothèse sera supposée vraie dans tout le problème.

Les deux parties du problème proposent successivement :

— de montrer, en étudiant l'évolution temporelle de $v_S(t)$, que la condition Eq. (1) conduit bien à supposer que $v_S(t)$ est constante si on choisit une période de commande T suffisamment petite ;

— de retrouver ce principe par une étude fréquentielle du montage.

IV.1. Etude temporelle du circuit

On suppose que à l'instant $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur est $v_S(t=0) = U_0 < E$ et que $\frac{\mathrm{d}v_S}{\mathrm{d}t}(t = 0^-) = 0$.

1. Vérifier que la condition Eq. (1) est bien vérifiée avec les données numériques proposées.

2. Montrer que la dérivée de $v_S(t)$ évolue de façon continue.

a. Etude de la phase A

Durant cette phase $v_E(t) = E$.

3. Montrer que la tension $v_S(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_S(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}v_S(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, v_S(t) = \omega_0^2\, E \tag{2}$$

où l'on exprimera Q et ω_0 en fonction de R, L et C. Aucune approximation n'est demandée pour cette question

4. En supposant la condition Eq. (1) validée, établir forme de la solution générale de l'équation différentielle précédente en fonction de E, Q et ω_0. On pourra introduire des grandeurs pour simplifier les expressions, notamment $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.

5. En utilisant les conditions initiales, déterminer les constantes d'intégration et donc l'expression explicite de $v_S(t)$.

6. On se place dans l'hypothèse où $T \ll \frac{1}{\omega_0}$. Montrer que, toujours sous la condition de l'Eq. (1), on peut alors approximer la solution ainsi :

$$v_S(t) \approx (U_0 - E)\, e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t) + E \tag{3}$$

En déduire que l'on peut considérer que $v_S(t)$ est pratiquement restée constante pendant la phase A : $v_S \approx U_0$.

b. Etude de la phase B

Durant cette phase $v_E(t) = 0$. On suppose toujours que $T \ll \frac{1}{\omega_0}$ de sorte qu'on prendra comme conditions initiales : $v_S(t = \alpha T) = U_0$ et $\frac{\mathrm{d}v_S}{\mathrm{d}t}(t = \alpha T) = 0$.

7. Déterminer l'expression explicite de $v_S(t)$ durant cette phase. On pourra utiliser le changement d'origine des temps $t' = t - \alpha T$ pour simplifier les calculs.

8. Justifier soigneusement qu'on puisse faire la même approximation : $v_S(t) \approx U_0$ pour la phase B.

IV.2. Etude fréquentielle

Plutôt que de dissocier les deux phases, on peut remplacer l'alimentation E et les deux interrupteurs par une tension $v_E(t)$ (Fig. 4) de période T telle que :

$$v_E(t) = \begin{cases} E & \text{si } 0 < t < \alpha T \\ 0 & \text{si } \alpha T < t < T\,. \end{cases} \tag{4}$$

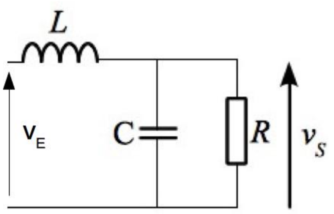

FIGURE 4 – Approche fréquentielle

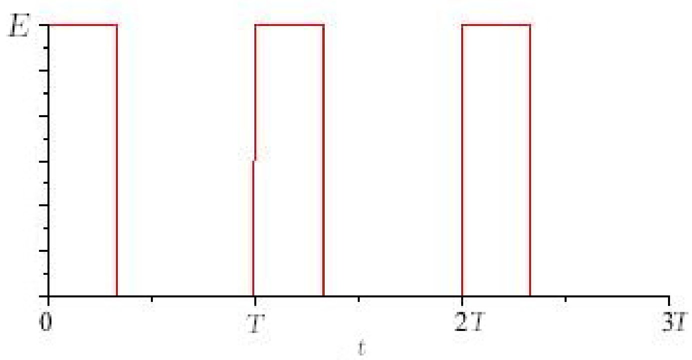

FIGURE 5 – Allure de $v_E(t)$

L'allure de $v_E(t)$ est donnée par la Fig. 5 et on donne sa décomposition en série de Fourier :

$$v_E(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos((2n-1)\omega t) \tag{5}$$

avec $a_0 = \alpha E$ et a_n des coefficients dont l'expression n'a pas d'importance pour la suite. On se propose de déterminer la réponse $v_S(t)$ en régime forcé au moyen d'une étude fréquentielle.

a. Etude fréquentielle

Pour réaliser l'étude fréquentielle, on remplace la tension $v_E(t)$ par une tension sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. On suppose le régime sinusoïdal forcé atteint et on pose $\underline{v_S}(t)$ la représentation complexe de $v_S(t)$.

9. Montrer que :

$$\underline{v_S}(t) = \frac{A_0}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} E_m e^{j\omega t} \tag{6}$$

Déterminer les expressions de A_0, ω_0 et Q en fonction de R, L et C.

10. Déterminer la tension $v_S(t)$ à haute fréquence puis à basse fréquence. Préciser le sens à donner à "haute fréquence" et "basse fréquence".

11. Déterminer, pour une pulsation ω quelconque, l'expression explicite de $v_S(t)$.

b. Détermination de la tension de sortie

On considère maintenant que la tension d'entrée est la tension $v_E(t)$ dont l'expression temporelle est donnée par l'Eq. (4) et la décomposition en série de Fourier par l'Eq. (5).

12. Quel sens donne-t-on à a_0 ? Justifier par le calcul que $a_0 = \alpha E$.

13. Donner l'expression littérale complète exacte de $v_S(t)$.

14. On se place dans l'hypothèse où $T \ll \frac{1}{\omega_0}$. Justifier que la tension $v_S(t)$ peut-être considérée constante, et déterminer son expression approximative.

c. Intérêt du hacheur

On suppose que l'ouverture et la fermeture des interrupteurs ne consomme aucune puissance.

15. Montrer qu'en régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne reçue par la bobine et le condensateur sont nulles.

16. En déduire la puissance moyenne consommée par la résistance P_R en fonction de la puissance moyenne fournie P_E.

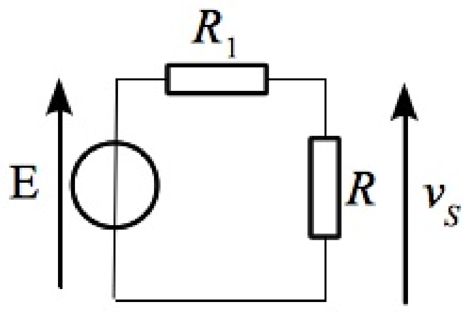

FIGURE 6

Pour comprendre l'intérêt du hacheur, on se propose d'étudier un montage simple permettant aussi d'obtenir $v_S = \alpha E$. Il est représenté en Fig. 6. E est une tension constante.

17. Déterminer v_S en fonction de E, R_1 et R. En déduire le rapport $\frac{R_1}{R}$ en fonction de α pour que $v_S = \alpha E$.

18. Déterminer le rendement énergétique $\eta = \frac{P_R}{P_E}$, avec P_R la puissance dissipée dans R et P_E la puissance fournie par E. Commenter, par comparaison, l'intérêt du hacheur.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *