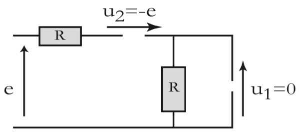
ÉLECTRICITÉ

I. Circuit en régime transitoire

1. En régime permanent stationnaire, le schéma électrique équivalent est représenté ci-contre. Tous les courants sont donc nuls, et donc toutes les tensions aux bornes de résistances le sont aussi. On a alors :



$$\boxed{u_{1\infty}=0}\,,\ \boxed{u_{2\infty}=-E}\,,\ \boxed{u_{1,0}=0}\,,\ \boxed{u_{2,0}=0}.$$

2. En passant par le stock d'énergie et en utilisant la continuité des tensions aux bornes des condensateurs, on obtient :

$$\begin{cases} W_{C1}=\int_0^\infty Cu_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}Cu_{1\infty}^2-\frac{1}{2}Cu_{1,0}^2 \\ W_{C2}=\int_0^\infty Cu_2\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}Cu_{2\infty}^2-\frac{1}{2}Cu_{2,0}^2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} W_{C1}=0 \\ W_{C2}=\frac{1}{2}CE^2>0 \end{cases}}$$

3. Sans connaître explicitement $i(t)$, on peut l'intégrer :

$$W_G=\int_0^\infty Ei\mathrm{d}t=-EC\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=CE\left(u_{2,0}-u_{2\infty}\right)\Longrightarrow\boxed{W_G=CE^2>0}.$$

4. La puissance fournie par le générateur se répartit dans l'ensemble des dipôles d'après la loi des mailles et la loi des nœuds $i=\frac{u_1}{R}+C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$:

$$\mathscr{P}_G=Ei=Ri^2+\frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}Cu_2^2}{\mathrm{d}t}+\frac{u_1^2}{R}+\frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}Cu_1^2}{\mathrm{d}t}=\mathscr{P}_{2R}+\frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}Cu_2^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}Cu_1^2}{\mathrm{d}t},$$

en notant $\mathscr{P}_{2R}$ la puissance totale reçue par les deux résistances. En intégrant ceci entre $t=0$ et $t\to\infty$ on obtient

$$W_G=W_{2R}+W_{C1}+W_{C2}\quad\Leftrightarrow\quad\boxed{W_{2R}=W_G-W_{C1}-W_{C2}=\frac{1}{2}CE^2}.$$

5. Par continuité de la tension aux bornes des condensateurs, on a $\boxed{u_1(0^+)=u_1(0^-)=u_{1,0}=0}$ et $u_2(0^+)=u_2(0^-)=u_{2,0}=0$.
La loi des mailles donne de plus : $\forall t>0,\ E=Ri-u_2+u_1\Longrightarrow i(0^+)=\frac{E}{R}$.
La loi des nœuds permet de déterminer $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}(0^+)$:

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}(0^+)=\frac{i(0^+)}{C}-\frac{u_1(0^+)}{RC}\quad\Leftrightarrow\quad\boxed{\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}(0^+)=\frac{E}{RC}}.$$

6. On repart de la loi des mailles

$$\forall t>0, E=Ri-u_2+u_1\quad\text{avec}\quad i=\frac{u_1}{R}+C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$$

par la loi des nœuds. Or $i=-C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$ donc il faut dériver la loi des mailles, ce qui donne

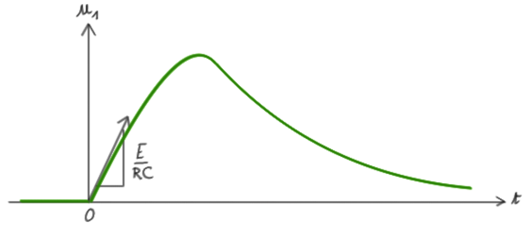
$$\forall t>0,\ 0=R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{i}{C}+\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u_1}{R}+C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{C}\left(\frac{u_1}{R}+C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\Leftrightarrow\quad\forall t>0\,,\ \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3}{RC}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{(RC)^2}u_1=0}.$$

On identifie[1] $\boxed{\omega_0=\frac{1}{RC}}$ et $\boxed{Q=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}}$. Seul le **régime apériodique** est donc possible ici.

Remarque : *On peut établir cette équation différentielle en supposant d'abord un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω, pour trouver la fonction de transfert $\frac{u_1}{e}$. Puis on repasse en écriture temporelle puisque cette relation est valable $\forall t$. Comme $e=E=$constante $\forall t>0$, on obtient un second membre nul pour $t>0$.*

7. D'après les conditions initiales on a un démarrage croissant ($\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}(0^+)=\frac{E}{RC}>0$) depuis $u_{1,0}=0$ et une limite $u_{1\infty}=0$. On aura donc un extremum, qui traduit que C_1 commence par se charger puis se décharge. On ne pourra pas avoir plusieurs extrema par une somme de 2 exponentielles qui décroissent chacune en valeur absolue. Cela donne l'allure ci-contre.



1. On peut remarque que cette équation différentielle est vérifiée aussi pour $t<0$. Toutefois le second membre n'est pas défini en $t=0$.

II. Étude en puissance d'un circuit «bouchon»

1. U : amplitude de $u(t)$. φ : phase à l'origine de $u(t)$.
I_L : amplitude de $i_L(t)$. ψ : phase à l'origine de $i_L(t)$.

2. On utilise le dipôle équivalent à l'association parallèle de R, L et C. On pose $\underline{Z}_{eq}$ son impédance et $\underline{Y}_{eq}$ son admittance. Ainsi

$$\underline{Y}_{eq} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega} \quad \text{d'où} \quad \underline{U} = \frac{R}{1 + jRC\omega + \frac{R}{jL\omega}}\underline{I} = \frac{R}{1 + j\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}\underline{I}\,.$$

Par identification avec la forme proposée dans l'énoncé, on en déduit

$$\begin{cases} Q/\omega_0 = RC \\ \omega_0 Q = R/L \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} Q = R\sqrt{C/L} \text{ (facteur de qualité)} \\ \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \text{ (pulsation propre)} \end{cases}}$$

3. $\boxed{U = |\underline{U}| = \dfrac{RI}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}}}$.

4. La fonction $g(x) = 1 + Q^2(x - 1/x)^2$ vérifie $g(x) \geq 1$ et $g(x = 1) = 1$ donc elle est minimale en $x = 1$. L'amplitude U est donc maximale en $x_r = 1$ ou $\omega_r = \omega_0$ qui constitue une résonance, telle que $\boxed{U_{max} = U(x = 1) = RI}$.

5.

$$\varphi = \arg(\underline{U}) = \arg(RI) - \arg(1 + jQ(x - 1/x)) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\varphi = -\arctan(Q(x - 1/x)) = \arctan(Q(1/x - x))}.$$

SCHEMA

6. La tension u en RSF a pour expression (avec $x = \omega/\omega_0$)

$$\boxed{u(t) = \Re\text{e}(\underline{u}) = U\cos(\omega t + \varphi) = \frac{RI}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}}\cos\left(\omega t + \arctan(Q(1/x - x))\right)}$$

À la résonance, $x = 1$ (ou encore $\omega = \omega_0$), donc $\boxed{u(t) = RI\cos(\omega_0 t)}$.

7.

$$\underline{u} = jL\omega\,\underline{i_L} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\underline{I_L} = \frac{\underline{U}}{jL\omega}} \quad \Rightarrow \quad I_L = |\underline{I_L}| = \frac{U}{L\omega} \quad \text{et} \quad \psi = \arg(\underline{i_L}) = \arg(\underline{u}) - \arg(jL\omega) = \varphi - \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{i_L(t) = \frac{U}{L\omega}\cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) = \frac{U}{L\omega}\sin(\omega t + \varphi)}.$$

Le déphasage de i_L par rapport à u est $\boxed{\psi - \varphi = -\pi/2 < 0}$. Ainsi i_L est en **retard de phase** (en quadrature) par rapport à u.

8. À la résonance, $x = x_r =$ (ou encore $\omega = \omega_0$) :

$$i_L(t) = \frac{RI}{L\omega_0}\cos(\omega_0 t - \pi/2) = \frac{RI}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t) \quad \text{d'où} \quad \boxed{i_L(t) = QI\sin(\omega_0 t)}.$$

9. Puissance moyenne reçue par la résistance :

$$\mathcal{P}_R = \left\langle \frac{u^2(t)}{R} \right\rangle = \frac{U^2}{R}\left\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{P}_R = \frac{U^2}{2R}}.$$

10. Cette puissance moyenne est maximale lorsque U est maximale donc pour $\omega = \omega_0$ ($x = 1$), ce qui conduit à

$$\boxed{\mathcal{P}_{R_{max}} = \frac{RI^2}{2} = RI^2_{eff}}.$$

Interprétaion : Pour cette pulsation $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (uniquement) l'admittance totale se réduit à la conductance :

$$\frac{1}{R} + j\omega_0 C + \frac{1}{j\omega_0 L} = \frac{1}{R}$$

donc cela implique que le courant total circule dans la résistance ($i = i_R$), car les deux courant i_C et i_L (qui ne sont pas nuls), sont parfaitement opposés. Ainsi nécessairement $I_{R\,\text{eff}} = I_{\text{eff}}$.

11.

$$\mathcal{P}_R(x_{1,2}) = \frac{\mathcal{P}_{R_{\max}}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{RI^2}{2(1 + Q^2(x_{1,2} - 1/x_{1,2})^2)} = \frac{RI^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad Q^2(x_{1,2} - 1/x_{1,2})^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad (x_{1,2} - 1/x_{1,2}) = \pm\frac{1}{Q} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2}^2 \mp \frac{x_{1,2}}{Q} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \mp\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q}\sqrt{1 + 4Q^2}$$

en choisissant les deux seules racines positives. Par conséquent $\boxed{\Delta x = x_2 - x_1 = \dfrac{1}{Q}}$. **Le facteur de qualité est égal à l'acuité de la résonance en puissance du circuit bouchon.**

III. Détermination d'une installation inductive

➔ La puissance moyenne reçue par l'installation s'écrit

$$\mathcal{P} = \langle u(t)i(t)\rangle = \sqrt{2}U_{\text{eff}}\sqrt{2}I_{\text{eff}}\,\langle\cos(\omega t + \varphi)\cos(\omega t)\rangle = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\,\langle\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)\rangle = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}(0 + \cos(\varphi))$$

d'où $\boxed{\mathcal{P} = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos(\varphi)}$.

➔ L'impédance équivalente est $\underline{Z} = R + j\omega L$. Les données de l'énoncé permettent d'écrire

$$|\underline{Z}|^2 = R^2 + L^2\omega^2 = \frac{U_{\text{eff}}^2}{I_{\text{eff}}^2}$$

et comme

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{R}{|\underline{Z}|} = \frac{RI_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}}}$$

on en déduit

$$\mathcal{P} = RI_{\text{eff}}^2\,.$$

Cette équation exprime que toute la puissance moyenne reçue est totalement consommée par la résistance, par dissipation par effet Joule, car en moyenne la puissance reçue par une inductance en RSF est nulle. On en déduit

$$\boxed{R = \frac{\mathcal{P}}{I_{\text{eff}}^2}} = \underline{1{,}9\,\Omega}$$

puis en revenant à la première équation,

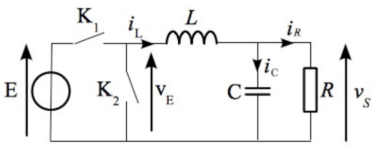
$$L\omega = \sqrt{\frac{U_{\text{eff}}^2}{I_{\text{eff}}^2} - R^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{L = \frac{1}{2\pi f I_{\text{eff}}}\sqrt{U_{\text{eff}}^2 - \frac{\mathcal{P}^2}{I_{\text{eff}}^2}}} = \underline{6{,}4\,\text{mH}}\,.$$

IV. Hacheur de Buck

IV.1. Étude temporelle du circuit

1. $\underline{RC = 10\,\text{s}}$ et $\underline{L/R = 10^{-5}\,\text{s}}$. On a donc bien $\boxed{RC \gg L/R}$

2.



$v_S(t)$ est la tension aux bornes d'un condensateur, elle varie donc de façon continue. De plus, $i_L(t)$ traverse une bobine donc varie aussi continûment. On a $\frac{\mathrm{d}v_S}{\mathrm{d}t} = \frac{i_C}{C}$ avec i_C l'intensité circulant en convention récepteur dans le condensateur. De la loi des nœuds $i_C = i_L - i_R = i_L - \frac{v_S}{R}$, il vient que :

$$\frac{dv_S}{dt} = \frac{i_L}{C} - \frac{v_S}{RC}\,.$$

Il s'agit d'une somme de fonctions continues, donc $\frac{dv_S}{dt}$ varie de façon continue.

a. *Etude de la phase A*

3. La loi des mailles s'écrit (u_L est la tension aux bornes de la bobine en convention récepteur) :

$$E = u_L + v_S = L\frac{di_L}{dt} + v_S\,.$$

En injectant la relation $i_L = C\frac{dv_S}{dt} + \frac{v_S}{R}$ établie à la question précédente on obtient

$$E = LC\frac{d^2v_S}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dv_S}{dt} + v_S \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2v_S(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}v_S(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, v_S(t) = \omega_0^2\, E}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \frac{1}{RC} & = \frac{\omega_0}{Q} \\ \frac{1}{LC} & = \omega_0^2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\begin{cases} \omega_0 & = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q & = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}}\,.$$

4. On cherche une solution particulière constante, il vient : $v_{S,P}(t) = E$.
On note ensuite que la condition sur C correspond en fait à

$$RC \gg \frac{L}{R} \quad \Leftrightarrow \quad R^2\frac{C}{L} \gg 1 \quad \Leftrightarrow \quad Q^2 \gg 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{Q \gg 1}\,.$$

Les valeurs numériques proposées donnent $\underline{Q = 10^3}$. L'équation caractéristique est de discriminent $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$. Or $Q \gg 1 > \frac{1}{2}$ donc $\Delta < 0$ et **le régime est pseudo-périodique**. Les racines s'écrivent sous la forme $\frac{1}{\tau} \pm j\omega$ avec $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$ et $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$. La solution générale de l'équation complète prend alors la forme

$$\boxed{v_S(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\,\left(A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t)\right) + E} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2\,.$$

5. v_S et sa dérivée sont continues, donc leurs valeurs à $t = 0$ sont :

$$\begin{cases} A + E & = U_0 \\ -A/\tau + B\omega & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A & = U_0 - E \\ B & = \frac{U_0 - E}{\tau\omega} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_S(t) = (U_0 - E)\, e^{-\frac{t}{\tau}}\,\left(\cos(\omega t) + \frac{1}{\tau\omega}\,\sin(\omega t)\right) + E}\,.$$

6. Puisque $Q \gg 1$, on a en fait $\omega \approx \omega_0$ et $\tau\omega \approx \tau\omega_0 = 2Q \gg 1$, d'où $\frac{1}{\tau\omega} \ll 1$. Finalement on peut en déduire que tant que $\cos(\omega t)$ n'est pas trop proche de son annulation, c'est-à-dire pour $\omega t \approx \omega_0 t \ll 1$, alors

$$\boxed{v_S(t) \approx (U_0 - E)\, e^{-\frac{t}{\tau}}\,\cos(\omega_0 t) + E}\,.$$

Pour $T\omega_0 \ll 1$, l'expression ci-dessus sera non seulement valable tout au long de la phase A mais en plus on a alors $\cos(\omega_0 t) \approx 1$. D'autre part le facteur exponentiel vérifie aussi $e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 1$ puisque

$$\frac{t}{\tau} < \frac{T}{\tau} = \frac{T\omega_0}{\omega_0\tau} = \frac{T\omega_0}{2Q} \ll 1$$

puisque $T\omega_0 \ll 1$ et $Q \gg 1$. Finalement on a donc $\boxed{v_S(t) \approx (U_0 - E) + E \approx U_0}$ pour tout t inférieur à αT, soit sur toute la phase A. **On peut donc considérer v_S constante.**

b. *Etude de la phase B*

7. Par analogie avec la partie précédente (il suffit de prendre $E = 0$), il vient immédiatement que l'équation différentielle est :

$$\frac{\mathrm{d}^2v_S(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}v_S(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, v_S(t) = 0\,,$$

où l'**on peut remplacer t par $t' = t - \alpha T$ puisque les coefficients de l'équation sont constants**. La solution est donc de la forme :

$$v_S(t') = e^{-\frac{t'}{\tau}}\,\left(A'\,\cos(\omega t') + B'\,\sin(\omega t')\right) \quad \text{avec} \quad (A', B') \in \mathbb{R}^2\,.$$

Les conditions initiales sont les mêmes que pour la phase A, mais pour $t' = 0$ donc $t = \alpha T$. On obtient donc les mêmes expressions qu'en phase A en remplaçant t par t' et E par 0 :

$$\boxed{v_S(t) = U_0\, e^{-\frac{t-\alpha T}{\tau}}\,\left(\cos(\omega(t - \alpha T)) + \frac{1}{\tau\omega}\,\sin(\omega(t - \alpha T))\right)}\,.$$

8. Les conditions d'approximation $Q \gg 1$ et $\omega_0 t' \ll 1$ étant toujours valables, on approxime par les mêmes arguments qu'en **6.** :

$$\omega \approx \omega_0\;,\; \tau\omega \gg 1 \quad \text{et} \quad \frac{t}{\tau} \ll 1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_S(t) \approx U_0\cos(\omega_0(t - \alpha T))\, e^{-\frac{t-\alpha T}{\tau}} \approx U_0 \times 1 \times 1 = U_0}$$

La tension sera bien constante sur l'ensemble de la période T.

IV.2. Etude fréquentielle

a. *Etude fréquentielle*

9. La loi des mailles s'écrit : $\underline{v_E} = jL\omega\underline{i_L} + \underline{v_S}$. De $\underline{i_L} = jC\omega\underline{v_S} + \frac{\underline{v_S}}{R}$, il vient :

$$\underline{v_E} = (-LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega + 1)\,\underline{v_S} \quad \text{d'où} \quad \underline{v_S}(t) = \frac{A_0}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} E_m e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2} & = LC \\ \frac{1}{Q\omega_0} & = \frac{L}{R} \end{cases}$$

Il vient : $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$, $\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$ et $\boxed{A_0 = 1}$.

Remarque : *La loi du pont diviseur de tension aurait donné directement, après association des deux admittances en dérivation :*

$$\underline{v_E} = \frac{\underline{v_S}}{1 + j\omega L\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)} \quad \textit{d'où le même résultat}.$$

Remarque : On pouvait aussi utiliser l'équation différentielle trouvée en **3.** et la passer en complexe sous l'hypothèse d'un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

10. En utilisant l'expression précédente on approxime ainsi :

- à basse fréquence (BF) c'est-à-dire $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} \ll 1$: $\underline{v_S} \approx \underline{e}$ donc $\boxed{v_{S,BF} \approx e(t)}$;

- à haute fréquence (HF) c'est-à-dire $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} \gg 1$: $\underline{v}_S \sim -\frac{e}{\omega^2/\omega_0^2} \underset{\frac{\omega}{\omega_0}\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\boxed{v_{S,BF} \approx 0}$.

11. On obtient $\boxed{v_S(t) = V_{Sm}\cos(\omega t + \phi)}$ avec

$$\boxed{V_{Sm} = |\underline{v}_S| = \frac{E_m}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}} \quad \text{et}$$

$$\phi = -\arg\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right) = -\arg\left(j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right) - \arg\left(\frac{Q\omega_0}{j\omega} - \frac{Q\omega}{j\omega_0} + 1\right) = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\phi = -\pi/2 - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}.$$

Remarque : *On a factorisé par la partie imaginaire pour obtenir une unique expression. Sinon il faut une disjonction de cas selon que* $\frac{\omega}{\omega_0} < 1$ *ou* > 1.

b. Détermination de la tension de sortie

12. a_0 est la valeur moyenne de $v_E(t)$. Par définition :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T v_E(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} E\mathrm{d}t = \frac{\alpha T E}{T} \quad \text{d'où} \quad \boxed{a_0 = \alpha E}.$$

13. On applique le théorème de superposition sachant que le filtre est linéaire :

$$v_S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{\left(1 - \frac{(2n-1)^2\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{(2n-1)^2\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}\cos\left((2n-1)\omega t + \phi((2n-1)\omega)\right)$$

$$\text{avec} \quad \boxed{\phi((2n-1)\omega) = -\pi/2 - \arctan\left(Q\left(\frac{(2n-1)\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{(2n-1)\omega}\right)\right)}.$$

14. Le signal d'entrée a donc pour pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} \gg \omega_0$ pour son mode fondamental. Donc toutes les harmoniques vérifient $\frac{(2n+1)\omega}{\omega_0} \gg 1$ et peuvent être assimilées à des hautes fréquences du point-de-vue de la question **10.**. Ainsi, seule subsiste la composante continue dans le signal de sortie, qui est à basse fréquence donc d'après **10.** vérifie $\boxed{v_S(t) \approx a_0 = \alpha E}$.

c. Intérêt du hacheur

15. Pour un condensateur, on a en convention récepteur la puissance moyenne reçue

$$P_C = \langle v_S i_C \rangle = \left\langle C v_S \frac{\mathrm{d}v_S}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_e}{\mathrm{d}t} \right\rangle \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_e = \frac{1}{2}Cv_S^2.$$

$$\text{Ainsi} \quad \langle \mathcal{P}_C \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_e}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[\mathcal{E}_e(t)\right]_0^T = \frac{1}{T}\left(\mathcal{E}_e(T) - \mathcal{E}_e(0)\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{P_C = 0}$$

car $\mathcal{E}_e(t)$ est T-périodique (et même $\frac{T}{2}$-périodique). Par un raisonnement analogue on a pour une inductance en convention récepteur

$$P_L = \left\langle \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} \right\rangle \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li_L^2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{P_L = 0}.$$

PCSI 1 - Stanislas — *DS de PHYSIQUE N°3 - 19/11/22 - CORRIGÉ* — A. MARTIN

16. On note le bilan en puissance instantanée comme suit, en utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds :

$$\mathscr{P}_E = i_L\left(L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + v_S\right) = \mathscr{P}_L + i_C v + i_R v = \mathscr{P}_L + \mathscr{P}_C + \mathscr{P}_R$$

où $\mathscr{P}_E$ est la puissance instantanée cédée par la source idéale E en amont du circuit et les termes suivant les puissances instantanées reçues respectivement par l'inductance, la capacité et la résistance. En prenant la valeur moyenne de ce bilan on obtient $\boxed{P_E = P_R}$, c'est-à-dire qu'**en moyenne, toute la puissance cédée par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance**.

17. Il s'agit d'un pont diviseur de tension, donc

$$v_S = \frac{R}{R_1 + R}E = \frac{E}{1 + \frac{R_1}{R}} \quad \text{donc} \quad v_S = \alpha E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+\frac{R_1}{R}} = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{R_1}{R} = \frac{1}{\alpha} - 1}.$$

18. Le pont étant assimilable à une seule résistance $R + R_1$, on a

$$P_E = \frac{E^2}{(R + R_1)} \quad \text{et} \quad P_R = \frac{v_S^2}{R} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R}\right)^2}\frac{E^2}{R} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\eta = \frac{P_R}{P_E} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R}} = \alpha < 1}.$$

Comme $P_R < P_E$, la charge R ne récupère pas toute l'énergie fournie avec ce simple pont diviseur de tension. **Alors qu'avec un hacheur, on obtient des rendements proches de 1 d'après la question précédente.**