ÉLECTRICITÉ

Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats doivent d'abord être écrits sous forme littérale et doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraisemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

CALCULATRICES AUTORISÉES

Ce problème comporte une Annexe à rendre avec la copie.

I. Modulation d'amplitude et de phase

I.1. Modulation d'amplitude

a. Fabrication du signal modulé

Le montage de la Fig. 1 représente schématiquement un modulateur d'amplitude : il comprend un multiplieur, qui délivre une tension de sortie $v_{s\,1} = k \times u_1 \times u_2$ (k étant une constante) et un sommateur qui délivre en sortie une tension v_s, égale à la somme des tensions d'entrée.

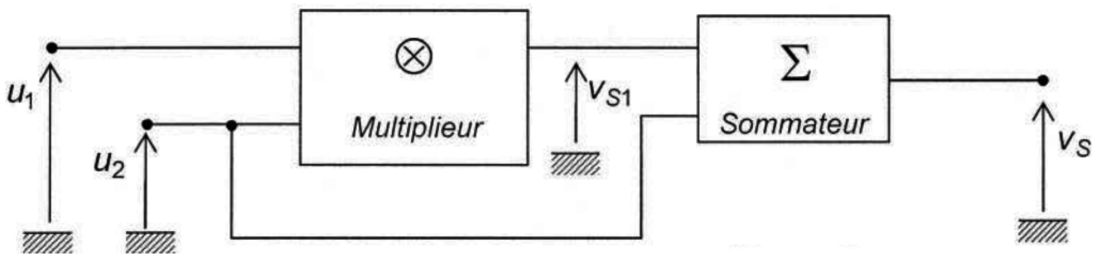


FIGURE 1 – Modulation d'amplitude

Les tensions sont sinusoïdales : $u_1(t) = U_m \cos(\omega_m t)$ et $u_2(t) = U_0 \cos(\omega_p t)$, avec $\omega_p \gg \omega_m$. Le signal $u_1(t)$ est appelé *signal modulant* et le signal $u_2(t)$ *signal de porteuse.*

1. Montrer que la tension de sortie $v_s(t)$ peut s'écrire sous la forme

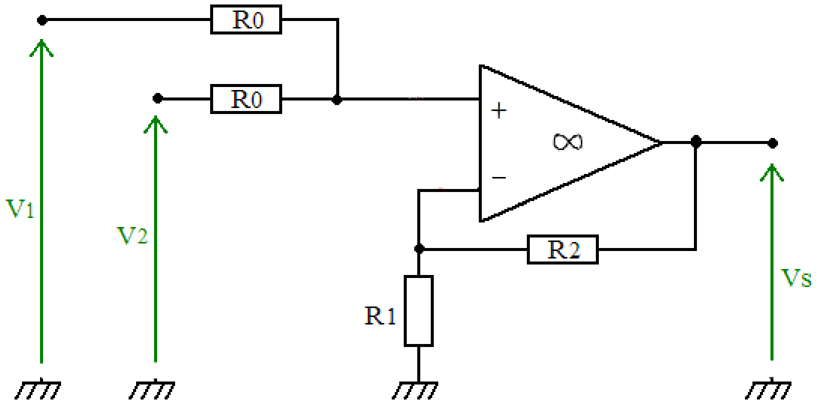
$$v_s(t) = U_0 \cos(\omega_p t)\,[1 + m\cos(\omega_m t)]$$

et déterminer m en fonction de k et de U_m.
Dans toute la suite, on supposera que $m < 1$.

2. Représenter graphiquement l'allure de la tension $v_s(t)$, en prenant en compte les différences d'échelles de temps. On indiquera les valeurs d'intérêt particulier.

3. Représenter, en le justifiant, le spectre en amplitude du signal $v_s(t)$ (indiquer la hauteur des pics et respecter symboliquement les différences d'échelles).

4. On propose ci-dessous un montage susceptible de réaliser le sommateur. l'ALI (dessiné sous la forme d'un triangle) est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire.
Établir la relation entre v_S et les tensions d'entrée v_1 et v_2.
Comment choisir les résistances pour obtenir un sommateur ?



b. Extraction du signal modulant par démodulation synchrone

Le signal $v_s(t)$ est émis par une antenne et réceptionné par une autre, ce qui produit un signal $e(t) = k'\, v_s(t)$ au niveau du récepteur, où k' est une constante sans importance ici qu'on pourra prendre égale à 1 sans perte de généralité. On souhaite alors extraire l'information contenue dans le signal modulant par la méthode de *démodulation synchrone*. Pour ce faire, on multiplie $e(t)$ par un signal de même pulsation et même phase que le signal de porteuse : $v_2(t) = V_0 \cos(\omega_p t)$. Puis on filtre le signal $v_{s\,2}(t)$ obtenu. Le tout est résumé dans la Fig. 2.

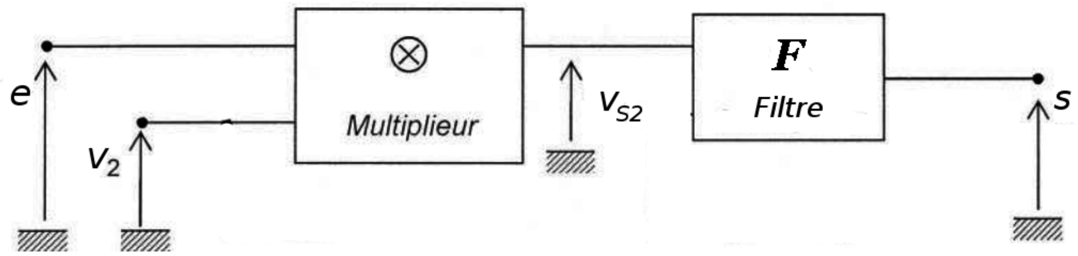


FIGURE 2 – Principe de la démodulation synchrone.

5. Représenter, en le justifiant, le spectre du signal $v_{s\,2}(t)$ (indiquer la hauteur des pics).

On se place dans le cas où le signal modulant est issu d'un signal sonore du domaine audible (ex : voix humaine, musique...). Sa fréquence f_m est donc contenue dans la bande de fréquences $[20\,\text{Hz}, 20\,\text{kHz}]$. Les aigüs étant mal restitués en sortie, on cherchera seulement à restituer la bande $[20\,\text{Hz}, 6\,\text{kHz}]$.
Comme cette bande s'étend particulièremment bas en fréquence, on procède au filtrage en deux étapes : le filtre $\mathcal{F}$ est en fait une succession de deux filtres $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, le premier éliminant les hautes fréquences et le second les basses.

6. Conception du filtre $\mathcal{F}_1$

a) Proposer un montage à base des composants R, L et C disposés en série, pour réaliser le filtre $\mathcal{F}_1$, de telle sorte qu'il soit du second ordre (ce que l'on vérifie à la question suivante). On indiquera bien la tension d'entrée et celle de sortie.
Justifier la fonction du filtre en étudiant les comportements asymptotiques du circuit à basse et haute fréquence.

b) Montrer que sa fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}_1}{\underline{v}_{s\,2}}$ en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω peut se mettre sous la forme canonique

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$$

où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite. On établira les expressions de sa pulsation propre ω_0 et de son facteur de qualité Q en fonction de R, L et C.

c) Montrer par les calculs nécessaires qu'il est judicieux de choisir une valeur de Q inférieure à une certaine valeur Q_m qu'on déterminera.
Pourquoi est-il optimal de choisir $Q = Q_\mathrm{m}$?
Dans la suite on choisira pour Q cette valeur.

d) Que vaut alors la fréquence de coupure $f_{c\,1}$ du filtre $\mathcal{F}_1$ en fonction des paramètres ?

e) Déduire des questions précédentes les valeurs à choisir pour R et C afin que le filtre $\mathcal{F}_1$ remplisse sa fonction, sachant que la bobine dont on dispose a pour inductance $L = 0,1\,\mathrm{H}$.

f) Etablir la forme asymptotique du diagramme de Bode en gain du filtre $\mathcal{F}_1$. La représenter sur le document Annexe. On prendra en abscisse la fréquence réduite $x = \frac{f}{f_{c\,1}}$.

7. Conception du filtre $\mathcal{F}_2$

a) Proposer un montage simple à base des composants R, et C pour réaliser le filtre $\mathcal{F}_2$, de telle sorte qu'il soit d'ordre 1. Justifier la nature du filtre par les comportements asymptotiques du circuit.

b) Etablir sa fonction de transfert en régime sinusoïdal de pulsation ω. Que vaut sa fréquence de coupure $f_{c\,2}$?

c) Proposer une valeur pour C afin que le filtre $\mathcal{F}_2$ remplisse sa fonction, sachant que $R = 100\,\mathrm{k\Omega}$.

d) Etablir la forme asymptotique du diagramme de Bode en gain du filtre $\mathcal{F}_2$. La représenter sur le document Annexe en gardant la même variable en abscisse, c'est-à-dire la fréquence réduite $x = \frac{f}{f_{c\,1}}$. On prendra soin de différencier la couleur et légender les courbes.

8. Mise en cascade des deux filtres

a) Est-il judicieux de mettre les filtres $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ directement en cascade ? Pourquoi ? Quelle solution peut-on envisager ?
On supposera ces précautions prises pour les questions suivantes.

b) Expliquer comment on peut alors obtenir le diagramme de Bode du filtre complet $\mathcal{F}$ à partir des diagrammes de Bode des deux filtres $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Représenter alors cette construction pour le diagramme de Bode asymptotique du filtre complet sur le document Annexe (à l'aide d'une 3ème couleur).

c. *Application*

On considère maintenant l'exemple de la transmission AM d'un signal radio émis par *France Inter*. Le signal de la porteuse correspondant est de fréquence $f_p = 162\,\mathrm{kHz}$. On considèrera ici l'émission d'un signal modulant sinusoïdal de fréquence $f_m = 1\,\mathrm{kHz}$. On suppose, pour les applications numériques, que :

— les deux signaux ne sont pas déphasés ;

— leur amplitude est identique et vaut $U_m = U_0 = 0,5\,\mathrm{V}$;

— on choisit $k = 1\,\mathrm{V}^{-1}$, $k' = 1$ et $V_0 = 1\,\mathrm{V}$.

Le signal modulé obtenu au moyen du montage de la partie **1.a** est envoyé sur la chaîne de démodulation étudiée dans la partie **1.b**. On notera $G(\omega)$ et $\phi(\omega)$ le gain total et la phase totale de la fonction de transfert du filtre $\mathcal{F}$.

9. a) Donner l'expression littérale exacte du signal de sortie $s(t)$, en fonction de U_0, m, k, k', des pulsations ω_p et ω_m, de G et ϕ et du temps t.

b) Calculer $G(\omega)$ explicitement et en déduire numériquement l'amplitude de chaque composante spectrale du signal de sortie.

c) Déduire des applications numériques précédentes l'expression approchée du signal de sortie (en précisant à quel niveau de précision). On n'oubliera pas de justifier la valeur approchée des déphasages.

I.2. Modulation de phase

a. Principe de la modulation

Pour certaines applications, il est souhaitable de moduler la phase du signal de porteuse, pour obtenir une tension de la forme $v_s(t) = U_0 \cos[\omega_p t + m \cos(\omega_m t)]$. Une approche, imaginée par l'inventeur E. Armstrong en 1933, permet très simplement d'obtenir un signal de ce type (pour les faibles modulations) en modifiant légèrement le montage de la Fig. 1.
Dans toute la suite, le taux de modulation m vérifie toujours $m \ll 1$.

10. Montrer que le signal de porteuse modulé en phase peut se mettre sous la forme

$$v_s(t) \approx U_0 \cos(\omega_p t) + f(t) \sin(\omega_p t)\,,$$

où $f(t)$ sera exprimée en fonction de m, U_0, ω_m et t.

Pour obtenir la tension $v_s(t)$, un opérateur «D_p» est introduit dans le montage, comme indiqué sur la Fig. 3 (on utilise le même multiplieur que précédemment).

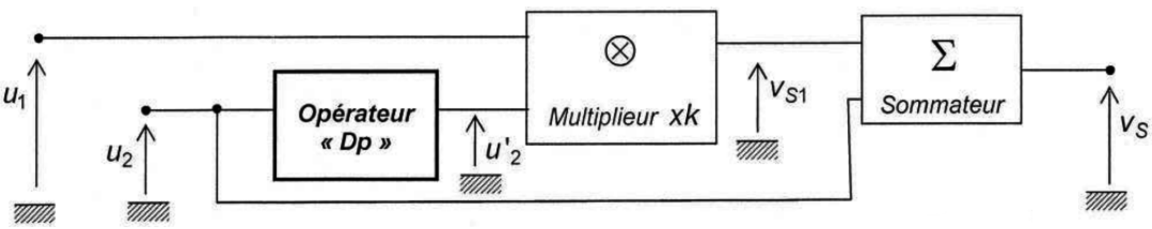
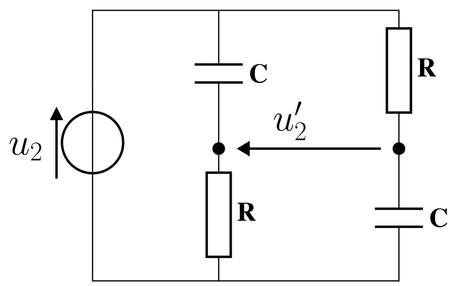


FIGURE 3 – Modulation en phase.

11. Quelle doit être la tension $u_2'(t)$ en sortie de l'opérateur « D_p» pour obtenir $v_s(t)$ sous la forme ci-dessus, le taux de modulation m restant inchangé par rapport à sa valeur de la question **1.** ? Quelle transformation l'opérateur «D_p» doit-il réaliser sur la tension $u_2(t)$?

b. Réalisation de l'opérateur «D_p»

On utilise le montage ci-contre, dans lequel les valeurs de R et C n'ont a priori rien à voir avec les valeurs obtenues dans la partie 1.



12. Etablir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_2'}}{\underline{u_2}}$ en fonction de R, C, et ω.

13. Montrer que le seul effet de cet opérateur est d'introduire un déphasage φ_D entre la sortie $u_2(t)$ et l'entrée $u_2'(t)$. Exprimer φ_D en fonction de R, C, et ω.

14. Comment peut-on choisir le produit RC, en fonction de ω_p, pour que l'opérateur de la Fig. 3 délivre effectivement le signal modulé en phase $v_p(t)$?

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *
(pensez à rendre votre annexe avec votre NOM et Prénom)

ANNEXE (à rendre avec la copie) - NOM Prénom :