

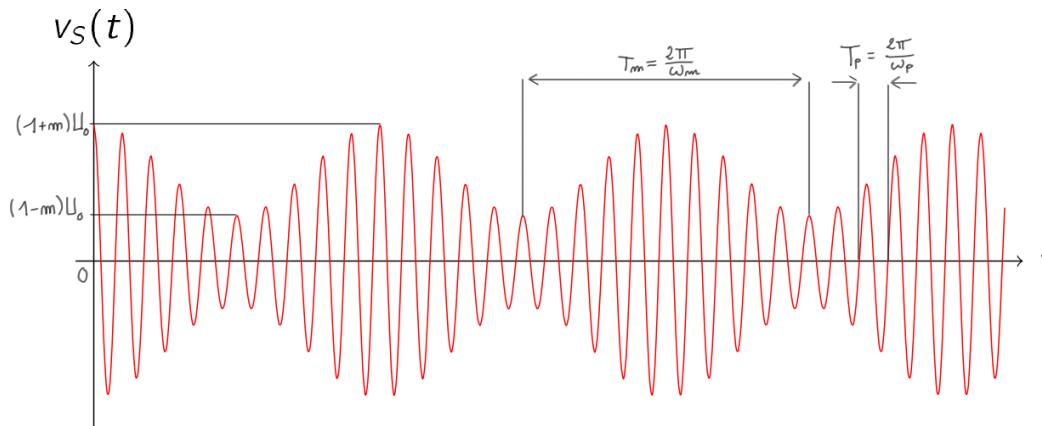
ÉLECTRICITÉ

I. Modulation d'amplitude et de phase

I.1. Modulation d'amplitude

a. Fabrication du signal modulé

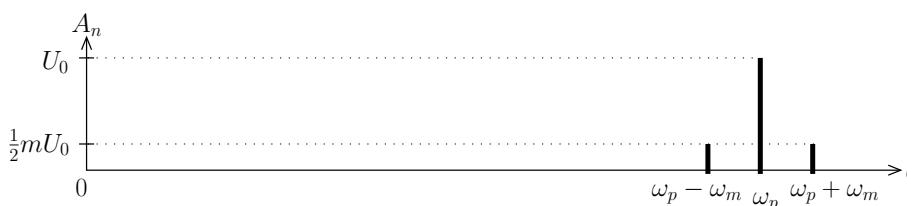
- Le montage conduit à $v_s = ku_1u_2 + u_2 = u_2(1 + ku_1)$, d'où l'expression proposée avec $m = kU_m$.
- Comme $\omega_p \gg \omega_m$, on a un signal porteur rapide dont l'amplitude est modulée lentement par le signal modulant :



- On décompose v_s en série de Fourier en linéarisant :

$$v_s = \frac{1}{2}mU_0 \cos((\omega_p - \omega_m)t) + U_0 \cos(\omega_p t) + \frac{1}{2}mU_0 \cos((\omega_p + \omega_m)t).$$

Il y a donc 3 composantes spectrales, toutes situées dans les hautes fréquences¹. D'où le spectre :



- Comme les courants i_+ et i_- sont nuls, et qu'en régime linéaire $v_+ = v_-$, la loi des nœuds en terme de potentiel conduit à

$$\frac{\frac{v_1}{R_0} + \frac{v_2}{R_0}}{\frac{2}{R_0}} = \frac{0 + \frac{v_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Leftrightarrow v_s = \frac{v_1 + v_2}{2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right).$$

On voit qu'il suffit de prendre $R_1 = R_2$ pour obtenir un vrai sommateur : $v_s = v_1 + v_2$.

1. C'est le principe de la modulation : les ondes électromagnétiques haute fréquence se propagent mieux qu'à basse fréquence, pour des raisons de rayonnement d'antenne notamment.

b. Extraction du signal modulant par démodulation synchrone

- On a $v_{s2} = kv_2v_s$. On obtient de même après développement

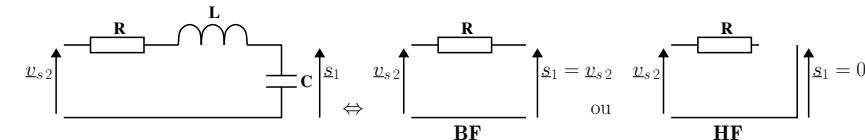
$$v_{s2} = \frac{1}{2}kU_0V_0 [1 + \cos(2\omega_p t)] + \frac{1}{4}mkU_0V_0 [\cos((2\omega_p - \omega_m)t) + 2\cos(\omega_m t) + \cos((2\omega_p + \omega_m)t)]$$

Il y a donc 5 composantes spectrales, dont une composante "continue" et une basse fréquence correspondant au signal modulant de pulsation ω_m :



6. Conception du filtre \mathcal{F}_1

- On prend la tension de sortie sur le condensateur, car il coupe le circuit à basse fréquence alors qu'il se comporte comme un fil à haute fréquence, ce qui donne un comportement passe-bas :



- La règle du pont diviseur de tension conduit à $H = [1 + jC\omega (R + jL\omega)]^{-1} = [1 + \frac{jx}{Q} - x^2]^{-1}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

- Le gain vaut $G_1(x) = [(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}]^{-\frac{1}{2}}$. Pour avoir un vrai comportement de passe-bas avec un gain monotone (décroissant), il faut éviter toute résonance. Sinon le filtre va se comporter de fait comme un passe-bande en privilégiant les fréquences centrales. On pose $f(x) = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ et on en cherche le minimum : $f'(x) = 0$ conduit à $x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$, ce qui n'est possible que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On souhaite donc imposer $Q \leq Q_m = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Par ailleurs $G_1(1) = Q$ donc le gain à basse fréquence décroît d'autant moins vite que Q est grand. Pour restituer au mieux les basses fréquences on choisit donc $Q = Q_m$.

- Pour cette valeur de Q , le gain s'écrit simplement $G_1(x) = 1/\sqrt{1+x^4}$. La fréquence de coupure vérifie $G(x_c) = G_{\max}/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$ donc $x_c = 1$, d'où $f_{c1} = f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$

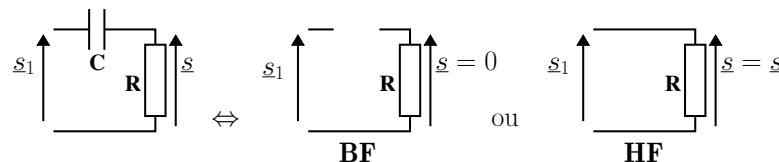
- On impose $f_{c1} = 6$ kHz donc $C = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{L f_{c1}^2} = 7$ nF. De plus, le choix de Q impose la valeur de R :

$$R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} = 5\text{k}\Omega.$$

- $G_{\text{dB}1} = 20 \log G_1 = -10 \log(1+x^4)$. Donc les deux asymptotes sont $G_{\text{dB}1} \xrightarrow{x \ll 1} 0$ et $G_{\text{dB}1} \xrightarrow{x \gg \infty} -40 \log x$. La transition s'opère de part et d'autre de $x = 1$, cf schéma en annexe (trait bleu continu).

7. Conception du filtre \mathcal{F}_2

a) On réalise un montage série en prenant la tension sur la résistance :



b) La relation du pont diviseur de tension conduit à $\underline{H}_2 = \frac{s}{s_1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}}$. Le gain $G_2(\omega) =$

$$\left[1 + \frac{1}{(RC\omega)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} G_{2\max} = 1. \text{ Donc } G_2(\omega_{c2}) = 1/\sqrt{2} \Leftrightarrow RC\omega_{c2} = 1, \text{ d'où } f_{c2} = \frac{1}{2\pi RC}.$$

c) On impose que $f_{c2} = 20 \text{ Hz}$, ce qui donne $C = \frac{1}{2\pi R f_{c2}} = 1,5 \mu\text{F}$.

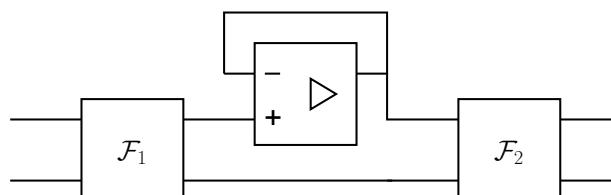
d) Sachant que $RC\omega = \frac{f}{f_{c2}} = \frac{f_{c1}}{f_{c2}} x$, on exprime le gain en fonction de x : $G_2(x) = \left[1 + \frac{f_{c2}^2}{f_{c1}^2 x^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$. On

obtient ainsi les formes asymptotiques suivantes : $G_{\text{dB}2} \underset{x \ll \frac{f_{c2}}{f_{c1}}}{\sim} 20 \log \frac{f_{c1}}{f_{c2}} + 20 \log x$ d'une part et

$G_{\text{dB}2} \underset{x \gg \frac{f_{c2}}{f_{c1}}}{\rightarrow} 0$ d'autre part. La transition a lieu en $x = \frac{f_{c2}}{f_{c1}} = 3,3 \times 10^{-3}$. D'où le tracé en annexe (trait discontinu vert).

8. Mise en cascade des filtres \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 .

a) Si l'on met les filtres directement en cascade, le filtre \mathcal{F}_1 n'aura plus la même fonction de transfert qu'en sortie ouverte, donc on n'aura pas globalement pour $\mathcal{F} : \underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$. Pour que les fonctions de transfert en sortie ouverte soient préservées dans le montage, une solution est d'intercaler un montage suiveur constitué à partir d'un Amplificateur Linéaire Intégré, selon le montage suivant :



Le montage suiveur ayant une impédance d'entrée quasi infinie et une impédance de sortie quasi nulle, on dit qu'il y a adaptation d'impédances et alors $\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$.

b) On a alors $G(\omega) = G_1(\omega) \cdot G_2(\omega)$, d'où $G_{\text{dB}} = G_{\text{dB}1} + G_{\text{dB}2}$. Le diagramme de Bode en gain de \mathcal{F} est la somme de celui de \mathcal{F}_1 et celui de \mathcal{F}_2 (cf annexe, tiret-point rouge).

c. Application

9. a) Le signal détaillé dans la question 5. entre dans le filtre. Il en sort $s(t) :$

$$\begin{aligned} s(t) &= G(0) \frac{1}{2} k U_0 V_0 \cos \varphi(0) \\ &+ G(\omega_m) \frac{1}{2} m k U_0 V_0 \cos(\omega_m t + \varphi(\omega_m)) \\ &+ G(2\omega_p - \omega_m) \frac{1}{4} m k U_0 V_0 \cos((2\omega_p - \omega_m)t + \varphi(2\omega_p - \omega_m)) \\ &+ G(2\omega_p) \frac{1}{2} m k U_0 V_0 \cos(2\omega_p t + \varphi(2\omega_p)) \\ &+ G(2\omega_p + \omega_m) \frac{1}{4} m k U_0 V_0 \cos((2\omega_p + \omega_m)t + \varphi(2\omega_p + \omega_m)) \end{aligned}$$

Notons que de fait la composante continue n'apparaît pas car $G(0) = 0$.

b) On a $G(\omega) = G_1(\omega) G_2(\omega) = \left[\left(1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{(RC\omega)^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}}$. Pour l'application numérique, il est plus pratique de travailler avec la fréquence compte-tenu des données : $G(f) = \left[\left(1 + \frac{f^4}{f_{c1}^4}\right) \cdot \left(1 + \frac{f^2}{f_{c2}^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}}$. On calcule les amplitudes de chacune des composantes du signal $s(t)$:

ω	0	ω_m	$2\omega_p - \omega_m$	$2\omega_p$	$2\omega_p + \omega_m$
$S_m(\omega)$ (V)	0	$1,2 \times 10^{-1}$	$2,2 \times 10^{-5}$	$8,6 \times 10^{-5}$	$2,1 \times 10^{-5}$

c) On peut donc à environ 0,1 % près (rapport des amplitudes) retenir uniquement la composante fondamentale à $\omega = \omega_m$, qui correspond au signal modulant. Par ailleurs, on a $\varphi(f_m) = \varphi_1(f_m) + \varphi_2(f_m)$ car $\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$. De plus, comme $\frac{f_m}{f_{c1}} = 0,16 \ll 1$ et $\frac{f_m}{f_{c2}} = 50 \gg 1$, on peut approximer $\varphi(f_m) \approx \arg(1) + \arg(j \frac{f_m}{f_{c2}})$, d'où $\varphi(f_m) \approx \frac{\pi}{2} \approx 90^\circ$. Finalement,

$$s(t) \approx S_m \cos(2\pi f_m t + \frac{\pi}{2}) = -S_m \sin(2\pi f_m t) \quad \text{avec} \quad S_m \approx 1,2 \times 10^{-1} \text{ V}.$$

I.2. Modulation de phase

a. Principe de la modulation

10. On développe le cosinus puis on approxime le sinus et le cosinus pour $m \ll 1$ (cf formulaire) :

$$v_s = U_0 [\cos(\omega_p t) \cos(m \cos(\omega_m t)) - \sin(\omega_p t) \sin(m \cos(\omega_m t))] \approx U_0 [\cos(\omega_p t) - \sin(\omega_p t) m \cos(\omega_m t)].$$

D'où la relation demandée, avec $f(t) = -m U_0 \cos(\omega_m t)$.

11. On doit avoir $u'_2(t) = -U_0 \sin(\omega_p t)$. L'opérateur « D_P » doit donc déphasier le signal u_2 en lui ajoutant $\frac{\pi}{2}$.

b. Réalisation de l'opérateur « D_P »

12. Il s'agit d'un pont de Wheatstone. On applique deux fois la règle du pont diviseur de tension : $\underline{H} = \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_2} = -\frac{1}{1+jRC\omega} + \frac{1}{1+jRC\omega}$, d'où $\underline{H} = -\frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}$.

13. Le gain vaut $|\underline{H}| = 1$ donc le filtre n'agit que sur la phase. On a $\arg(\underline{H}) = \arg(-1) + \arg(1 - jRC\omega) - \arg(1 + jRC\omega) = \pi - 2 \arg(1 - jRC\omega)$, d'où $\varphi_D = \pi - 2 \arctan(RC\omega)$.

14. On veut $\varphi_D = \frac{\pi}{2}$, donc $\frac{\pi}{4} = \arctan(RC\omega_p)$ d'où $RC = \frac{1}{\omega_p}$.

