

ONDES ET MÉCANIQUE

Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats doivent d'abord être écrits sous forme littérale et doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraisemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

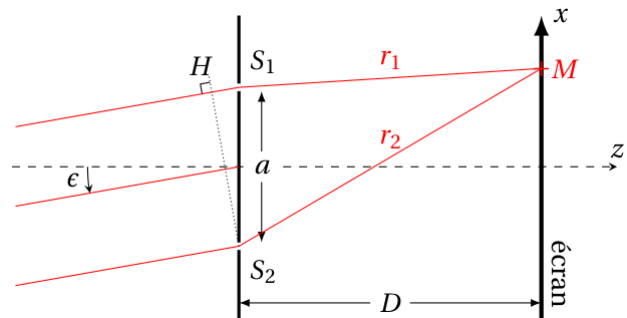
CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Détection d'étoiles doubles par interférométrie

On utilise une lunette astronomique que l'on pointe vers un couple de deux étoiles très voisines E_1 et E_2 , supposées ponctuelles et à l'infini. Elles émettent chacune une même lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$, et dont la célérité sera assimilée à celle du vide : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. On dispose la lunette de sorte que E_1 et E_2 soient symétriques par rapport à son axe optique. En sortie de la lunette, les faisceaux de rayons parallèles issus de E_1 et E_2 forment des angles respectifs $+\epsilon > 0$ et $-\epsilon < 0$ avec l'axe optique. Les étoiles étant voisines, on a $\epsilon \ll 1$.

Derrière l'oculaire de la lunette et dans un plan frontal, on place une feuille opaque percée de deux trous d'Young S_1 et S_2 séparés d'une distance a . En raison de la diffraction, chaque trou se comporte comme une nouvelle source lumineuse ponctuelle. On regarde l'éclairement au niveau d'un point M d'un écran orthogonal à l'axe optique, placé à une distance $D \gg a$ de la feuille.

Pour commencer, on suppose que la feuille est éclairée uniquement par l'étoile E_1 (cas représenté sur le schéma). On note $s_1(M, t) = A_1 \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_{01})$ et $s_2(M, t) = A_2 \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_{02})$ les signaux lumineux émis par les trous S_1 et S_2 . Ils ont la même pulsation mais leur retard de phase dépend des distances parcourues respectives $r_1 = S_1M$ et $r_2 = S_2M$. On note $s(M, t)$ le signal résultant de leur superposition.



1. Rappeler l'expression reliant k , ω et c puis celle reliant λ , c et f . Calculer la valeur numérique de la fréquence des ondes lumineuses.
2. Grâce à une représentation de Fresnel, établir l'expression de l'amplitude $A(M)$ du signal résultant de la superposition en M de s_1 et s_2 , en fonction de A_1 , A_2 et du déphasage $\Delta\varphi(M)$ de s_2 par rapport à s_1 .
3. L'intensité lumineuse $I(M)$ est proportionnelle à la moyenne temporelle de $s^2(M, t)$, ce que l'on note : $I(M) = 2\beta \langle s^2(M, t) \rangle$ où β est un coefficient constant. En supposant que les deux ondes lumineuses issues de S_1 et S_2 ont la même intensité lumineuse I_0 , établir l'expression de l'intensité $I(M)$ en fonction de I_0 et $\Delta\varphi(M)$.
4. Préciser l'expression de $\Delta\varphi(M)$ en fonction de la différence de marche $\delta(M)$ et de la longueur d'onde λ . Puis expliciter $\delta(M)$ en fonction de r_1 , r_2 et HS_1 .
5. On donne les coordonnées $M(x, y, D)$, $S_1(a/2, 0, 0)$ et $S_2(-a/2, 0, 0)$. On suppose de plus que $D \gg x, y$. Établir les expressions simplifiées de r_1 et r_2 en fonction de x , y , D et a , à l'aide d'un développement limité.
Rappel : $(1 + X)^\alpha \approx 1 + \alpha X$ lorsque $X \ll 1$.
6. On notera dorénavant l'intensité $I(M) = I_1(M)$ puisqu'elle est causée par l'étoile E_1 . Montrer que finalement

$$I_1(x) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{D} - \epsilon \right) \right) \right).$$

7. Quelle est la position x_0 du premier maximum de $I_1(x)$?
8. De même, établir les positions x_+ et x_- des deux premières annulations de l'intensité de part et d'autre de x_0 . En déduire l'expression de l'interfrange i en fonction de a , λ et D .
9. Tracer l'allure de $I_1(x)$ sur trois interfranges.

On considère désormais les rayons issus des deux étoiles simultanément. Bien qu'elles soient synchrones, les lumières issues des deux étoiles n'interfèrent pas entre elles car elles sont *incohérentes*, c'est-à-dire constituées chacune de trains d'ondes mutuellement décorrélés¹. Par conséquent la figure d'interférence observée sur l'écran est formée par l'addition des intensités $I_1(M)$ et $I_2(M)$ issues respectivement des étoiles E_1 et E_2 . On supposera enfin que l'intensité reçue de chaque étoile dans la lunette est la même.

10. En déduire l'expression de l'intensité $I_2(M)$ sur l'écran.
11. À l'aide d'une formule trigonométrique adaptée, exprimer l'intensité totale $I(x)$ sous la forme d'une somme d'un terme constant et d'un produit de deux fonctions sinusoïdales.
12. Déterminer la valeur maximale I_{\max} et minimale I_{\min} de l'intensité. En déduire l'expression du contraste $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$.
Montrer que le contraste s'annule pour certaines valeurs de a à expliciter (donc les franges d'interférences se brouillent, l'écran devient uniformément éclairé). Interpréter ce résultat d'après 9..
13. La plus petite distance a entre S_1 et S_2 pour laquelle les franges disparaissent vaut $a_{\min} = 71$ mm. En déduire la distance angulaire 2ϵ (en radians puis en secondes d'arc) entre les deux composantes de l'étoile double. Pourrait-on l'observer à l'œil nu ?

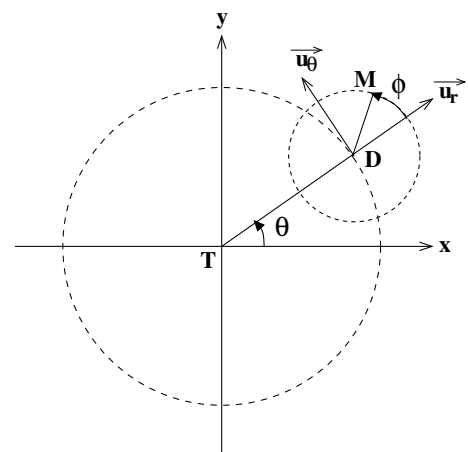
II. Mouvement de Mars vu de la Terre : théorie des épicycles

Vue de la Terre, la trajectoire de la planète Mars fait apparaître des mouvements dits *rétrogrades* : pendant un moment la planète semble reculer, avant de reprendre sa course en avant. Ces mouvements rétrogrades contredisant l'hypothèse d'une trajectoire circulaire autour de la Terre, les philosophes grecs eurent recours au modèle des épicycles pour les expliquer. On se propose ici d'adopter ce point de vue antique. On raisonne donc dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G = (T, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On néglige la rotation propre de la Terre, ce qui est possible à condition d'observer Mars chaque jour à la même heure.

On modélise donc la trajectoire de Mars, supposée plane, ainsi :

- un point D tourne à la vitesse angulaire constante ω_D sur un cercle, appelé *cercle déférent*, de rayon R_D et centré sur le centre de la Terre au point T .
- la planète Mars, assimilable à un point matériel M , tourne à la vitesse angulaire constante ω_E sur un cercle de rayon R_E ($< R_D$) et de centre D , appelé *épicycle*.

La base polaire $(\vec{u}_r; \vec{u}_\theta)$ est définie à partir du mouvement du point D , avec l'angle $\theta = (\vec{u}_x, \overrightarrow{TD})$, comme indiqué sur la figure ci-contre. Quant au mouvement de M , il est repéré dans la base polaire par l'angle $\phi = (\vec{u}_r, \overrightarrow{DM})$. A l'instant initial $t = 0$, on considère que les points T , D et M sont confondus le long de l'axe (Tx) . On donne la période de rotation du point D : $T_D = 431$ jours.



1. Exprimer les vecteurs \overrightarrow{TD} puis \overrightarrow{TM} dans la base polaire, en fonction du temps t , et de ω_E , R_D et R_E . En déduire l'expression de \overrightarrow{TM} dans la base cartésienne $(\vec{u}_x; \vec{u}_y)$.
2. Des mesures ont permis d'établir que la distance Mars-Terre variait entre $d_1 = 5,6 \cdot 10^{10}$ km et $d_2 = 4,0 \cdot 10^{11}$ km. En déduire l'expression des deux rayons R_E et R_D en fonction des distances d_1 et d_2 , puis leur valeur numérique.

1. cf programme de SPE.

En première approximation, on peut considérer que la trajectoire de la planète Mars est périodique de période minimale $T_M = \alpha \frac{2\pi}{\omega_D}$, avec $\alpha = 67$. Cela signifie que le point D a réalisé 67 tours avant que Mars ne revienne à sa position initiale.

3. En déduire qu'il existe un entier n non divisible par α , tel que $\omega_E = \frac{n}{\alpha} \omega_D$. Que signifie n ?
4. Exprimer la vitesse de Mars dans \mathcal{R}_G dans la base polaire.
5. Montrer que Mars ne peut posséder un mouvement rétrograde de temps en temps que si $n > k\alpha$ avec k une constante qu'on exprimera en fonction de R_D et R_E . En déduire les valeurs possibles pour n .
6. En réalité, on observe que Mars rétrograde 24 fois durant la période T_M . En déduire la valeur de n . Est-ce compatible avec la condition exprimée à la question 5. ?
7. Exprimer la durée Δt du phénomène de rétrogradation en fonction de T_D , R_D , R_E , α et n . Faire l'application numérique. En pratique, on trouve une moyenne de 75 jours. Commenter.
8. a) Exprimer l'accélération de Mars dans \mathcal{R}_G dans la base polaire. En déduire l'expression de sa norme en fonction de R_D , R_E , T_D , n , α et t .
 b) Pour quels instants t_M l'accélération sera-t-elle maximale ? Donner alors son expression littérale, puis sa valeur numérique. Représenter les vecteurs accélération et vitesse de Mars à ces instants. Est-on dans une phase où Mars « avance » ou « recule » ?
 c) Pour quels instants t_m l'accélération sera-t-elle minimale ? Donner alors son expression littérale, puis sa valeur numérique. Représenter les vecteurs accélération et vitesse de Mars à ces instants. Est-on dans une phase où Mars « avance » ou « recule » ?

III. Modélisation de la nage des bactéries

Dans ce problème, nous allons nous intéresser à des bactéries dont les flagelles ont la forme d'une hélice, comme par exemple *Escherichia Coli*. Après quelques rappels sur les écoulements visqueux, nous allons montrer que la rotation des flagelles, permet la propulsion des bactéries.

Données numériques typiques d'une bactérie <i>Escherichia Coli</i> :	Autres données numériques :
— Rayon du corps : $R = 1 \mu\text{m}$	— Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
— Longueur des flagelles : $\ell_f = 10 \mu\text{m}$	— Viscosité de l'eau à 25°C : $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$
— Rayon de l'hélice : $a = 0,2 \mu\text{m}$	— Masse volumique de l'eau à 25°C : $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
— Pas de l'hélice : $\Lambda = 2\pi h$ avec $h = 0,1 \mu\text{m}$	
— Vitesse de rotation des flagelles : $\Omega = 7 \times 10^2 \text{ rad.s}^{-1}$	

III.1. Sédimentation d'une bille dans un écoulement à bas nombre de Reynolds

Dans cette partie, nous nous intéressons au mouvement d'une bille sphérique sous l'effet de la pesanteur, de rayon r_0 et de masse volumique ρ_0 , dans un liquide de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ uniforme ($\rho \leq \rho_0$).

Nous notons $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur. Au cours de sa chute, la bille subit une force de la part du fluide, modélisée par la force de Stokes :

$$\vec{F}_S = -6\pi\eta r_0 \vec{V} \quad (1)$$

où \vec{V} désigne la vitesse relative de la sphère par rapport au fluide supposé au repos. Cette loi de Force n'est valable que pour des valeurs suffisamment petites du nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{2r_0 V \rho}{\eta} \ll 1.$$

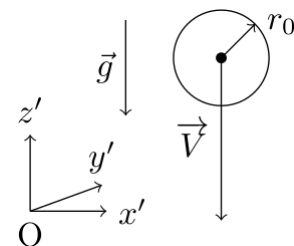


FIGURE 1 – Sédimentation d'une sphère dans un fluide sous l'effet de son poids.

La bille subit aussi la *poussée d'Archimède*. On rappelle² que pour un corps totalement immergé dans un fluide au repos, la poussée d'Archimède est égale à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé par ce corps (en l'occurrence donc l'opposé du poids d'une bille de liquide sphérique de même taille). La situation est représentée sur la Fig. (1). Pour rappel, le volume d'une boule de rayon r_0 est $\frac{4}{3}\pi r_0^3$.

1. En supposant que l'expression statique de la poussée d'Archimède reste applicable dans ces conditions, expliciter les forces puis établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse \vec{V} de la sphère.
2. En déduire l'évolution de la vitesse en fonction du temps t en supposant que la sphère est lâchée sans vitesse initiale.
Montrer enfin que la sphère tombe dans la direction de la pesanteur et atteint une vitesse constante V_∞ (en norme) au bout d'un temps caractéristique τ . On exprimera V_∞ et τ en fonction de r_0 , ρ , ρ_0 , η et g .
3. Pour cette question uniquement, on considère la chute d'une bille de silice de rayon $r_0 = 1\ \mu\text{m}$ et de masse volumique $\rho_0 = 2,6\ \text{g.cm}^{-3}$ chutant dans de l'eau. Déterminer la vitesse stationnaire de chute ainsi que le temps typique après lequel elle est atteinte. Est-ce cohérent avec l'application de la loi de Stokes ?
4. La masse volumique d'une bactérie est proche de celle de l'eau, de l'ordre de $\rho_0 = 1,01\ \text{g.cm}^{-3}$. On considère que l'on peut négliger les effets de la pesanteur lors d'une expérience si la bactérie a sédimenté sur une hauteur faible par rapport à celle de la zone d'observation. Déterminer un ordre de grandeur du temps d'observation au-delà duquel l'effet de la sédimentation devient observable pour une étude dans une cellule de microscopie d'épaisseur $e_{\text{cell}} = 500\ \mu\text{m}$.

III.2. Sédimentation d'un cylindre dans un écoulement à bas nombre de Reynolds

Afin de modéliser le mouvement d'un flagelle dans un fluide visqueux, il est nécessaire d'étudier préalablement l'action du fluide sur ce flagelle. Pour ce faire, nous allons tout d'abord étudier la force exercée par le fluide sur un cylindre soumis à une force extérieure \vec{F}_{ext} . Contrairement au cas de la sphère étudié dans la partie III.1, la vitesse du cylindre n'est pas nécessairement colinéaire à la force extérieure. Pour fixer les idées, on pourra imaginer que cette force extérieure correspond à l'action de la pesanteur (incluant le terme de poussée d'Archimède), mais les résultats obtenus seront généraux.

Considérons un cylindre de masse M uniformément répartie, de masse volumique ρ_0 , de longueur ℓ et de rayon $R_0 \ll \ell$, chutant dans un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ uniforme ($\rho \leq \rho_0$). Nous désignons par G son centre d'inertie, et introduisons un repère orthonormé direct $(GXYZ)$, représenté sur la Fig. (2(a)), et la base $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$ qui lui est associée. (GZ) désigne l'axe du cylindre et (GXY) correspond au plan médian du cylindre, orthogonal à l'axe principal. On choisira l'axe (GX) de sorte que la force extérieure \vec{F}_{ext} appartienne au plan (GXZ) .

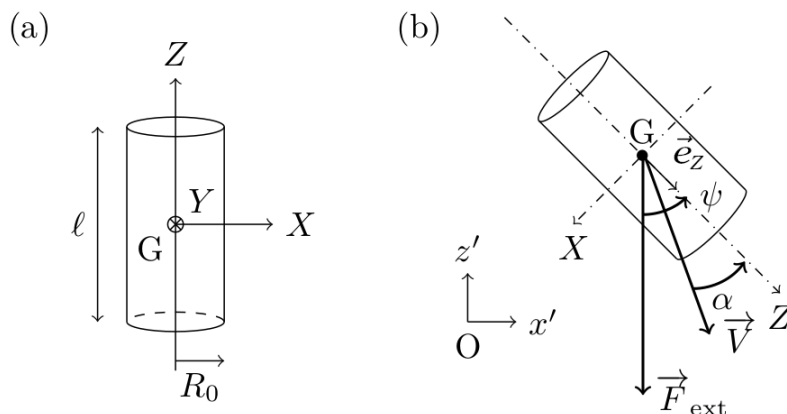


FIGURE 2 – (a) Repère $(GXYZ)$ associé au cylindre de hauteur ℓ et de rayon R_0 . (b) Sédimentation d'un cylindre d'axe orienté par le vecteur unitaire \vec{e}_Z soumis à une force extérieure \vec{F}_{ext} .

2. cf programme de SUP 2ème semestre.

Lorsque le cylindre est en chute dans le fluide, nous définissons \vec{V} la vitesse du centre d'inertie G par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R} = (Ox'y'z')$, orienté de sorte que $\vec{F}_{\text{ext}} = -F_{\text{ext}}\vec{e}_{z'}$ avec $F_{\text{ext}} > 0$, convention intuitive dans le cas où la force extérieure est liée à la pesanteur. Soient alors α l'angle formé par la vitesse du cylindre \vec{V} et son axe \vec{e}_Z , et ψ l'angle formé par la pesanteur \vec{g} et l'axe \vec{e}_Z du cylindre. La situation est représentée sur la Fig. (2(b)).

À bas nombre de Reynolds, on admet que la force visqueuse \vec{F}_v exercée par le fluide sur le cylindre reste en relation linéaire avec son vecteur vitesse \vec{V} , mais elle ne lui est plus parallèle :

$$\vec{F}_v = -\lambda \left(2\vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{e}_Z)\vec{e}_Z \right) \quad \text{avec} \quad \lambda = 4\pi\eta\ell. \quad (2)$$

5. Donner une interprétation physique de cette expression, en comparaison avec le cas de la sphère vu précédemment.

Dans toute la suite nous considérons que le cylindre est soumis à une force extérieure \vec{F}_{ext} constante et nous supposons que l'angle ψ reste constant.

6. Établir le système d'équations différentielles vérifié par les composantes V_X , V_Y et V_Z de la vitesse \vec{V} du cylindre par rapport au référentiel du laboratoire \mathcal{R} .
7. Déterminer l'angle α que forme la vitesse de sédimentation avec l'axe (GZ) du cylindre en régime stationnaire établi, en fonction de ψ .
Déterminer dans quel(s) cas particulier(s) le cylindre chute dans la direction de la force extérieure.

III.3. Propulsion d'une bactérie

Afin de simplifier la discussion, nous considérons ici que la bactérie possède un unique flagelle, et qu'elle n'est soumise à aucune force extérieure ($\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$). Le flagelle a approximativement la forme d'une hélice de pas $\Lambda > 0$, de rayon a et de longueur projetée ℓ_f selon l'axe z . Nous notons F le point correspondant à l'extrémité libre du flagelle, et nous introduisons la direction \vec{e}_z de son axe. Le flagelle est mis en rotation autour de son axe à une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$ par un moteur moléculaire. La situation est représentée sur la Fig. (3).

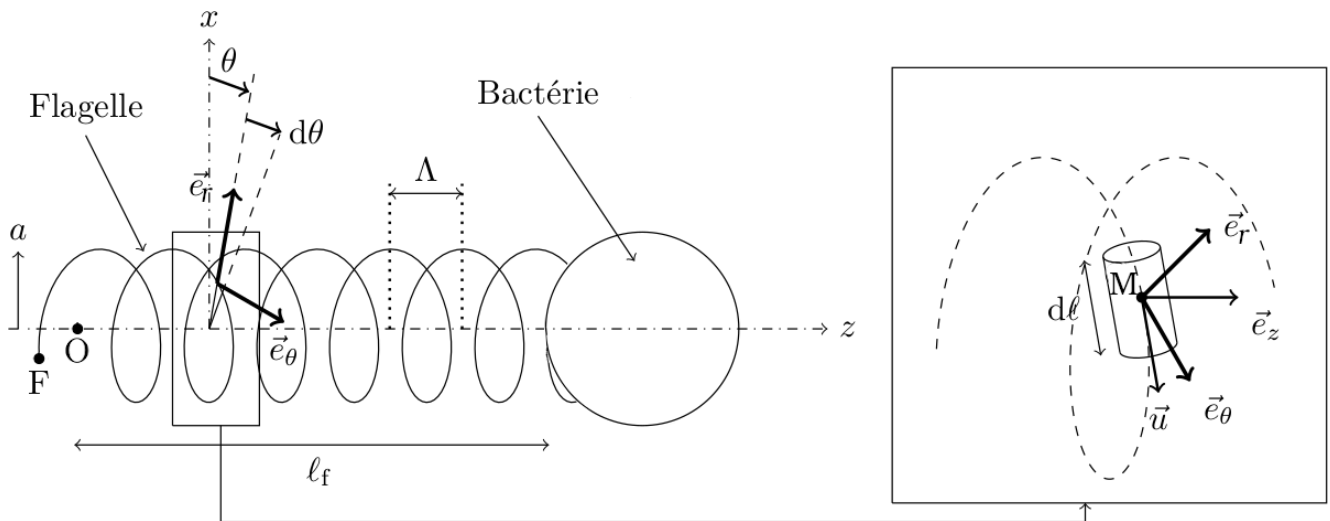


FIGURE 3 – Représentation d'une bactérie pourvue d'un flagelle unique d'extrémité F , mis en rotation autour de son axe (Oz) .

Nous supposons en outre pour simplifier les calculs que l'hélice est parfaite, et effectue un nombre entier de tours, c'est-à-dire que sa longueur projetée est un multiple entier de son pas. Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, l'hélice est définie en coordonnées cylindriques par l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = \vec{r}(\theta) = a\vec{e}_r + h\theta\vec{e}_z.$$

8. Rappeler ce qu'est le pas de l'hélice Λ , et justifier le lien existant entre Λ et la constante h .
9. Déterminer les bornes de variation de l'angle θ pour décrire la totalité de l'hélice (depuis l'extrémité F du flagelle jusqu'à son point d'attache sur la membrane de la bactérie) en fonction des paramètres utiles.
10. En supposant que le fluide reste immobile lors de la rotation de l'hélice (de façon imagée, l'hélice « se visse » dans le fluide sans le mettre en mouvement), la vitesse de translation de la bactérie selon l'axe du flagelle est alors directement reliée à la vitesse de rotation du flagelle. Exprimer, en fonction de Λ et Ω , la vitesse V_{\max} de translation de la bactérie dans ce cas.
L'application d'une loi de type Stokes comme en **III.1** et **III.2** vous paraît-elle pertinente ?

Nous souhaitons maintenant caractériser le mouvement de l'hélice dans un fluide visqueux une fois le régime stationnaire atteint, et pour une vitesse de rotation Ω fixée. Pour cela, nous allons calculer la résultante \vec{F}_v des forces appliquées par le fluide à l'hélice lors de son mouvement.

Considérons un tronçon élémentaire de l'hélice délimité par les angles θ et $\theta + d\theta$ (avec $d\theta > 0$), représenté dans l'agrandissement de la Fig. (3) et dont le centre est repéré par $\vec{OM}(\theta)$. Nous assimilons cet élément à un cylindre de longueur $d\ell = ||d\vec{\ell}||$, choisie grande devant son rayon, et d'axe orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}(\theta)$. La loi de l'Eq. (2) appliquée à ce cylindre élémentaire de vitesse \vec{V} (au point M) prend alors la forme suivante,

$$d\vec{F}_v = -4\pi\eta d\ell \left(2\vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{u})\vec{u} \right),$$

et la résultante s'obtient en intégrant sur tout le flagelle :

$$\vec{F}_v = \int_{\text{hélice}} d\vec{F}_v.$$

11. En notant que le vecteur $d\vec{\ell}$ correspond au déplacement élémentaire $d\vec{OM}(\theta)$ le long de l'hélice, exprimer la longueur $d\ell$ en fonction de $d\theta$, de a et h . Puis exprimer le vecteur directeur unitaire \vec{u} tangent à ce brin d'hélice dans la base cylindrique.
12. Sachant que le mouvement du flagelle combine une rotation autour de (Oz) à la vitesse angulaire Ω et une translation selon l'axe (Oz) de vitesse V , exprimer le vecteur vitesse \vec{V} du point M dans la base cylindrique en fonction de Ω et V notamment.
13. En déduire l'expression de $d\vec{F}_v$ sur la base cylindrique, puis intégrer pour établir l'expression de \vec{F}_v en fonction de V , Ω , a et h . On montrera notamment que \vec{F}_v peut être décomposée sous la forme

$$\vec{F}_v = (T + P) \vec{e}_z$$

où T et P sont à identifier comme représentant respectivement un effet de traînée et un effet de propulsion. On justifiera pas un argument de symétrie que \vec{F}_v est nécessairement dirigée selon \vec{e}_z .

14. Montrer que pour les dimensions d'une bactérie, la force de traînée $T \vec{e}_z$ domine la force de Stokes \vec{F}_S (cf Eq. (1)) qui s'exerce sur le corps sphérique de la bactérie se déplaçant à la même vitesse de translation V .
15. En conséquence, on peut supposer que lorsque le régime stationnaire est atteint, l'effet de traînée $T \vec{e}_z$ compense parfaitement l'effet de propulsion $P \vec{e}_z$. En déduire que la vitesse de translation de la bactérie vérifie alors

$$V = \frac{a^2 h}{2a^2 + h^2} \Omega.$$

16. Calculer la valeur de cette vitesse pour la bactérie considérée et commenter relativement au résultat de la question 10.

Que dire de la vitesse de sédimentation évaluée à la question 4., négligée dans cette partie ?

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *