

## ONDES ET MÉCANIQUE

### I. Détection d'étoiles doubles par interférométrie (d'après Mines 2004 et CCP MP 2008)

1. Pour un milieu non dispersif et non absorbant, la relation de dispersion s'écrit

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} \Rightarrow \boxed{f = \frac{c}{\lambda}} = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

2. Le théorème d'Al Kashi conduit à

$$\boxed{A(M) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Delta\varphi(M))}}.$$

3. Les deux ondes ont la même intensité donc

$$I_0 = 2\beta < s_1^2(M, t) > = 2\beta A_1^2 < \cos^2(\omega t - kr_1 + \varphi_{01}) > = \beta A_1^2 \quad \text{et} \quad I_0 = \beta A_2^2.$$

Ainsi

$$\boxed{I(M) = \beta A^2(M)} \quad \text{d'où} \quad \boxed{I(M) = 2I_0 (1 + \cos(\Delta\varphi))}.$$

4. On a  $\Delta\varphi = -k(r_2 - r_1) + \varphi_{02} - \varphi_{01}$  et le déphasage des sources entre elles est du à la différence de distance parcourue avant les trous :  $\varphi_{02} - \varphi_{01} = k HS_1$ . Ainsi, par définition

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} \delta(M)} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\delta(M) = r_2 - r_1 - HS_1}.$$

5.

$$r_1 = S_1 M = \sqrt{(x - a/2)^2 + y^2 + D^2} = D \left( 1 - \underbrace{\frac{ax}{D^2} + \frac{x^2 + y^2 + a^2/4}{D^2}}_{x \ll 1} \right)^{\frac{1}{2}} \approx D \left( 1 - \frac{ax}{2D^2} + \frac{x^2 + y^2 + a^2/4}{2D^2} \right)$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{r_1 \approx D - \frac{ax}{2D} + \frac{x^2 + y^2 + a^2/4}{2D}}$$

en se limitant à l'ordre 2 dans l'approximation. De même on obtiendra

$$\boxed{r_2 \approx D + \frac{ax}{2D} + \frac{x^2 + y^2 + a^2/4}{2D}}.$$

6. On note que l'angle  $\epsilon$  se reporte dans le triangle rectangle  $HS_1S_2$  de telle sorte que  $\epsilon = (\widehat{S_2S_1}, \widehat{S_2H})$ , ce qui permet d'écrire

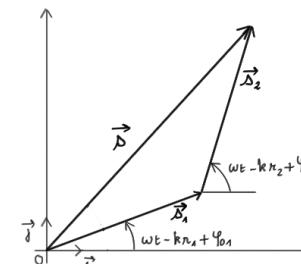
$$HS_1 = a \sin \epsilon \approx a\epsilon,$$

relation algébrique qui sera utilisable aussi si  $\epsilon < 0$ . En réunissant les résultats des 3 précédentes questions on obtient finalement

$$\boxed{\delta(M) = \frac{ax}{D} - a\epsilon} \quad \text{d'où} \quad \boxed{I_1(x) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \left( \frac{x}{D} - \epsilon \right) \right) \right)}.$$

7. Le premier maximum est obtenu pour

$$\cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \left( \frac{x_0}{D} - \epsilon \right) \right) = 1 \Rightarrow \frac{x_0}{D} - \epsilon = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = D\epsilon}.$$

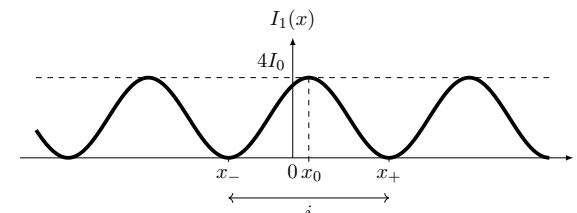


8. Les deux premières franges sombres sont localisées respectivement en  $x_-$  et  $x_+$  telles que

$$\cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \left( \frac{x_\pm}{D} - \epsilon \right) \right) = -1 \Rightarrow \frac{2\pi a}{\lambda} \left( \frac{x_\pm}{D} - \epsilon \right) = \pm\pi \Leftrightarrow \boxed{x_\pm = D \left( \pm \frac{\lambda}{2a} + \epsilon \right)}.$$

On en déduit l'interfrange, qui est l'espacement entre 2 franges sombres (ou brillantes) consécutives :

$$\boxed{i = x_+ - x_- = \frac{\lambda D}{a}}.$$



9.

10. La seconde étoile donne la même forme d'intensité à condition de remplacer  $\epsilon$  par  $-\epsilon$  :

$$\boxed{I_2(x) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \left( \frac{x}{D} + \epsilon \right) \right) \right)}.$$

11. En utilisant  $\cos p + \cos q = 2 \cos \left( \frac{p-q}{2} \right) \cos \left( \frac{p+q}{2} \right)$ , on obtient :

$$\boxed{I(x) = I_1(x) + I_2(x) = 4I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi a\epsilon}{\lambda} \right) \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right)}.$$

12. On en déduit

$$I_{\min} = 4I_0 \left( 1 - \left| \cos \left( \frac{2\pi a\epsilon}{\lambda} \right) \right| \right) \quad \text{et} \quad I_{\max} = 4I_0 \left( 1 + \left| \cos \left( \frac{2\pi a\epsilon}{\lambda} \right) \right| \right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{C = \left| \cos \left( \frac{2\pi a\epsilon}{\lambda} \right) \right| \in [0; 1]}.$$

Le contraste est donc nul si

$$\cos \left( \frac{2\pi a\epsilon}{\lambda} \right) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \frac{2\pi a_n \epsilon}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow \boxed{a_n = \left( \frac{1}{2} + n \right) \frac{\lambda}{2\epsilon}}.$$

Ce résultat peut se comprendre d'après la figure représentée en 9. : la première frange brillante de  $I_1$  est en  $x_0 = D\epsilon$  alors que celle de  $I_2$  sera en  $-x_0 = -D\epsilon$ . Or l'interfrange  $i = \frac{\lambda D}{a}$ , qui est le même pour  $I_1$  et  $I_2$ , diminue lorsque  $a$  augmente. Donc il y aura brouillage des franges si les franges brillantes de  $I_1$  coïncident avec des franges sombres de  $I_2$ , c'est-à-dire si le décalage  $2x_0$  correspond à un nombre demi-entier de fois l'interfrange :

$$2x_0 = \left( \frac{1}{2} + n \right) i \Leftrightarrow 2D\epsilon = \left( \frac{1}{2} + n \right) \frac{\lambda D}{a_n} \Leftrightarrow \boxed{a_n = \left( \frac{1}{2} + n \right) \frac{\lambda}{2\epsilon}}.$$

13. On a donc pour  $n = 0$  :

$$\boxed{a_0 = a_{\min} = \frac{\lambda}{4\epsilon} \Leftrightarrow 2\epsilon = \frac{\lambda}{2a_{\min}} \approx \frac{4 \times 10^{-6}}{2a_{\min}} \text{ rad} \approx 1''}.$$

Le pouvoir séparateur de l'œil étant de l'ordre de qq  $10^{-4}$  rad (quelques dixièmes de mm discerné à 1 m de distance), on accède ici à une distance indiscernable à l'œil nu grâce à la mesure de  $a_{\min}$  donnant lieu au premier brouillage.

## II. Mouvement de Mars vu de la Terre : théorie des épicycles

1. Les vitesses angulaires étant constantes, d'après les conditions initiales on peut écrire :  $\theta = \omega_D t$  et  $\phi = \omega_E t$ . Or  $\vec{TM} = \vec{TD} + \vec{DM}$  avec

$$\vec{TD} = R_D \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{DM} = R_E (\cos \phi \vec{u}_r + \sin \phi \vec{u}_\theta) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{TM} = (R_D + R_E \cos(\omega_E t)) \vec{u}_r + R_E \sin(\omega_E t) \vec{u}_\theta}.$$

Or  $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$  et  $\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$ , donc après regroupement des termes on obtient

$$\boxed{\vec{TM} = (R_D \cos(\omega_D t) + R_E \cos((\omega_D + \omega_E)t)) \vec{u}_x + (R_D \sin(\omega_D t) + R_E \sin((\omega_D + \omega_E)t)) \vec{u}_y}.$$

*Remarque : Cette relation peut être obtenue sans passer par la base polaire, directement en remarquant que  $(\vec{u}_x, \vec{DM}) = \theta + \phi$ .*

2. Dans les situations où les trois points sont alignés, on a  $d_1 = R_D - R_E$  et  $d_2 = R_D + R_E$  d'où

$$\boxed{R_D = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) = 2,3 \times 10^{11} \text{ km}} \quad \text{et} \quad \boxed{R_E = \frac{1}{2}(d_2 - d_1) = 1,7 \times 10^{11} \text{ km}}.$$

3. Notons  $T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$  la période du mouvement de  $D$  (durée d'un tour autour de  $T$ ), et  $T_E = \frac{2\pi}{\omega_E}$  la période du mouvement de  $E$  (durée d'un tour autour de  $D$ ). Par définition de  $T_M$ , au bout d'une durée  $T_M = 67T_D$ , le  $M$  retrouve sa position initiale. Pendant cette durée le point  $D$  a effectué 67 tours donc il retrouve aussi sa position initiale. Par conséquent les points  $T, D, M$  sont de nouveau alignés et  $M$  a donc aussi effectué **nombre entier  $n \in \mathbb{N}^*$  de tours autour de  $D$** . On a donc

$$T_M = \alpha T_D \quad \text{et} \quad T_M = n T_E \quad \text{d'où} \quad \alpha \frac{2\pi}{\omega_D} = n \frac{2\pi}{\omega_E} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\omega_E = \frac{n}{\alpha} \omega_D}.$$

Supposons que  $n = p\alpha$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ , on aurait alors  $T_D = pT_E$  donc les 3 points seraient de nouveau alignés au bout d'une durée  $T_D$  donc  $T_D = T_M$ , ce qui est absurde. Donc  **$n$  n'est pas un multiple de  $\alpha$** .

4. Dans la suite on note simplement  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}_G} = \vec{v}$  la vitesse de  $M$  dans  $\mathcal{R}_G$ . On reprend l'expression de la position en polaires trouvée en 1. :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{TM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_G} \quad \text{avec} \quad \frac{d\vec{u}_r}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_G} = \omega_D \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_G} = -\omega_D \vec{u}_r \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{\vec{v} = -R_E(\omega_D + \omega_E) \sin(\omega_E t) \vec{u}_r + (R_D \omega_D + R_E(\omega_D + \omega_E) \cos(\omega_E t)) \vec{u}_\theta}$$

après regroupement des termes.

5. L'existence d'un mouvement rétrograde se traduit par une vitesse orthoradiale négative :

$$\vec{u}_\theta \cdot \vec{v} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_D \omega_D + R_E(\omega_D + \omega_E) \cos(\omega_E t) < 0 \quad \Rightarrow \quad R_D \omega_D - R_E(\omega_D + \omega_E) < 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_D + \omega_E > \frac{R_D}{R_E} \omega_D \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega_E}{\omega_D} > \frac{R_D}{R_E} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{\alpha} > \frac{R_D}{R_E} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{n > ak} \quad \text{avec} \quad \boxed{k = \frac{R_D}{R_E} - 1}.$$

On trouve alors  $n \geq 22$  avec  $n \notin \alpha \mathbb{N}$ .

6. Si la condition de rétrogradation est satisfaite, **il existe un mouvement rétrograde à chaque tour de  $M$  autour de  $D$** , pendant la phase où  $M$  est entre  $T$  et  $D$ . Donc  $n = 24$ , ce qui est cohérent avec la condition précédente.

7. La vitesse de rétrogradation est maximale (minimale en valeur algébrique) à l'instant  $t_m$ , lorsque  $T, M$ , et  $D$  sont alignés dans cet ordre. On a alors

$$\vec{u}_\theta \cdot \vec{v} = R_D \omega_D - R_E(\omega_D + \omega_E) < 0 \quad \text{car} \quad \cos(\omega_E t_m) = -1.$$

Par parité du cos, la durée de rétrogradation  $\Delta t$  est partagée équitablement entre avant et après cet extrémum. On a donc au début de la rétrogradation une vitesse orthoradiale nulle à l'instant  $t_0 = t_m - \frac{\Delta t}{2}$  :

$$\vec{u}_\theta \cdot \vec{v} = 0 = R_D \omega_D + R_E(\omega_D + \omega_E) \cos(\omega_E(t_m - \frac{\Delta t}{2})) = R_D \omega_D + R_E(\omega_D + \omega_E) \cos(\pi - \frac{\omega_E \Delta t}{2})$$

$$\Leftrightarrow 0 = R_D \omega_D - R_E(\omega_D + \omega_E) \cos(\frac{\omega_E \Delta t}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta t = \frac{\alpha T_D}{n \pi} \arccos\left(\frac{\frac{R_D}{R_E}}{1 + \frac{n}{\alpha}}\right)} \approx 84 \text{ jours}.$$

Le, modèle s'écarte des observations d'environ 12%, ce qui avec le recul peut paraître faible au vu du caractère arbitraire et simpliste du modèle.

8. a) Dans la suite on note simplement  $\vec{a}_{M/\mathcal{R}_G} = \vec{a}$  l'accélération de  $M$  dans  $\mathcal{R}_G$ . On reprend l'expression de la vitesse en polaires trouvée en 4. :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_G} = - (R_E(\omega_D + \omega_E)^2 \cos(\omega_E t) + R_D \omega_D^2) \vec{u}_r - R_E(\omega_D + \omega_E)^2 \sin(\omega_E t) \vec{u}_\theta}.$$

D'où, en rappelant que  $\frac{\omega_E}{\omega_D} = \frac{n}{\alpha}$  :

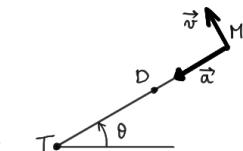
$$\boxed{\|\vec{a}\| = \frac{4\pi^2}{T_D^2} \sqrt{R_D^2 + R_E^2 \left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)^4 + 2R_E R_D \left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)^2 \cos\left(\frac{n}{\alpha} \frac{2\pi}{T_D} t\right)}}.$$

- b)  $\|\vec{a}\|$  est maximale quand

$$\cos\left(\frac{n}{\alpha} \frac{2\pi}{T_D} t_M\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_M = p \frac{\alpha}{n} T_D} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{N}.$$

$$\text{On a alors} \quad \boxed{\|\vec{a}\| = \frac{4\pi^2}{T_D^2} \left(R_D + R_E \left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)^2\right)} = 15 \text{ m.s}^{-2}, \text{ mais aussi}$$

$$\vec{a} = - (R_E(\omega_D + \omega_E)^2 + R_D \omega_D^2) \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = (R_D \omega_D + R_E(\omega_D + \omega_E)) \vec{u}_\theta.$$



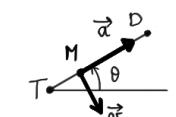
Comme  $\vec{u}_\theta \cdot \vec{v} > 0$  Mars semble **aller en avant**.

- c)  $\|\vec{a}\|$  est minimale quand

$$\cos\left(\frac{n}{\alpha} \frac{2\pi}{T_D} t_m\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_m = (p + \frac{1}{2}) \frac{\alpha}{n} T_D} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{N}.$$

$$\text{On a alors} \quad \boxed{\|\vec{a}\| = \frac{4\pi^2}{T_D^2} \left[-R_D + R_E \left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)^2\right]} = 2,7 \text{ m.s}^{-2}, \text{ mais aussi}$$

$$\vec{a} = (R_E(\omega_D + \omega_E)^2 - R_D \omega_D^2) \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = -(R_D \omega_D + R_E(\omega_D + \omega_E)) \vec{u}_\theta.$$



Comme  $\vec{u}_\theta \cdot \vec{v} < 0$  Mars semble **aller en arrière**.

### III. Modélisation de la nage des bactéries (d'après ENS BCPST 2020)

#### III.1. Sédimentation d'une bille dans un écoulement à bas nombre de Reynolds

1. La masse de la bille est  $m = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0$  et celle du fluide déplacé par cette bille est  $\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho$ . Dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ , supposé galiléen, le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) s'écrit

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = -6\pi\eta r_0 \vec{V} + m\vec{g} - \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho \vec{g} \Leftrightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{1}{\tau} \vec{V} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \vec{g} \quad \text{avec } \tau = \frac{2r_0^2 \rho_0}{9\eta}.$$

2. Il s'agit d'une équation linéaire à coefficients constants, et second membre constant. La solution particulière est cherchée constante et sera la limite pour  $t \rightarrow \infty$  :

$$\vec{V}_\infty = \tau \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \vec{g} = -\frac{2r_0^2(\rho_0 - \rho)}{9\eta} g \vec{u}_z.$$

Le mouvement tend donc bien vers un mouvement rectiligne uniforme dirigé selon  $\vec{g}$ .

Sachant que  $\vec{V}(t=0) = \vec{0}$ , la solution générale s'écrit  $\vec{V}(t) = \vec{V}_\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ .

3. On obtient  $V_\infty = 3,6 \mu\text{m.s}^{-1}$  et  $\tau = 0,6 \mu\text{s}$ . Cela conduit à  $R_e \approx 10^{-5} \ll 1$  donc la loi de Stokes s'applique bien.

4. La bactérie faisant la même taille, le temps caractéristique  $\tau$  est du même ordre ( $10^{-7} \text{ s}$ ) et donc on peut considérer la vitesse  $\vec{V}_\infty$  atteinte immédiatement. Le mouvement est donc rectiligne uniforme et donc la durée de traversée de la cellule est

$$\Delta t = \frac{e_{\text{cell}}}{V_\infty} = \frac{9\eta e_{\text{cell}}}{2r_0^2(\rho_0 - \rho) g} = 2,2 \times 10^4 \text{ s} \approx 6 \text{ h}.$$

La sédimentation devient observable au bout d'un temps de l'ordre de quelques heures, ce qui laisse le temps de réaliser des mesures facilement.

#### III.2. Sédimentation d'un cylindre dans un écoulement à bas nombre de Reynolds

5. On peut écrire

$$\vec{F}_v = -\lambda \vec{V} - \lambda \left( \vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{e}_Z) \vec{e}_Z \right)$$

Le premier terme ressemble beaucoup au cas de la sphère, car colinéaire à  $\vec{V}$  avec un facteur  $\lambda$  analogue.

Par contre il existe un second terme qui est orthogonal à l'axe du cylindre :  $\vec{e}_Z \cdot (\vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{e}_Z) \vec{e}_Z) = 0$ .

Il y a donc un effet de portance associé à la forme de l'objet.

6. Cette fois le TRC appliqué au cylindre s'écrit

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = -\lambda \left( 2\vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{e}_Z) \vec{e}_Z \right) + \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{V}_X + \frac{2\lambda}{M} V_X &= \frac{F_{\text{ext}}}{M} \sin \psi \\ \dot{V}_Y + \frac{2\lambda}{M} V_Y &= 0 \\ \dot{V}_Z + \frac{\lambda}{M} V_Z &= \frac{F_{\text{ext}}}{M} \cos \psi \end{cases}$$

par projection.

7. En régime stationnaire, le système ci-dessus devient

$$\begin{cases} \frac{2\lambda}{M} V_X &= \frac{F_{\text{ext}}}{M} \sin \psi \\ \frac{2\lambda}{M} V_Y &= 0 \\ \frac{\lambda}{M} V_Z &= \frac{F_{\text{ext}}}{M} \cos \psi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_X &= \frac{F_{\text{ext}}}{2\lambda} \sin \psi \\ V_Y &= 0 \\ V_Z &= \frac{F_{\text{ext}}}{\lambda} \cos \psi \end{cases}$$

L'angle  $\alpha$  vérifie par définition  $\tan \alpha = \frac{V_X}{V_Z}$  d'où  $\boxed{\alpha = \arctan \left( \frac{1}{2} \tan \psi \right)}$ .

Le cylindre chute dans la direction de la force extérieure à la condition

$$\alpha = \psi \Leftrightarrow \tan \psi = \frac{1}{2} \tan \psi \Leftrightarrow \tan \psi = 0 \Leftrightarrow \boxed{\psi = 0 \text{ ou } \pi},$$

donc si l'axe du cylindre est parallèle à  $\vec{F}_{\text{ext}}$  (cylindre vertical dans le champ de pesanteur).

#### III.3. Propulsion d'une bactérie

8. Le pas est la distance parcourue selon l'axe de l'hélice au bout d'un tour :

$$\boxed{\Lambda = 2\pi h}.$$

9. L'hélice fait un nombre entier  $n$  de tours et donc de pas :  $n = \frac{\ell_f}{\Lambda} = \frac{\ell_f}{2\pi h}$  d'où  $\theta \in \boxed{[0; \frac{\ell_f}{h}]}.$

10. Si le flagelle se visse dans le fluide sans le faire bouger, la trajectoire de chaque élément du flagelle est confondue avec le flagelle (qui ne semble pas bouger à part son ses extrémités). Donc au cours d'un tour, la distance parcourue selon l'axe  $Oz$  est égale au pas de l'hélice  $\Lambda$ . La durée d'un tour est égale à la période de rotation  $T$  telle que

$$2\pi = \Omega T \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad \text{d'où} \quad V_{\text{max}} = \frac{\Lambda}{T} = \frac{\Lambda \Omega}{2\pi} = \boxed{70 \mu\text{m.s}^{-1}}.$$

Ceci correspond à un nombre de Reynolds de l'ordre<sup>1</sup> de  $Re = \frac{2aV_{\text{max}}\rho}{\eta} \approx 3 \times 10^{-5} \ll 1$ . Donc le modèle de Stokes est applicable.

11. Le vecteur position du cylindre élémentaire se décompose ainsi :  $\vec{OM} = a\vec{u}_r + z\vec{u}_z$  avec  $z = h\theta$ .  
On fait varier  $\theta$  et donc  $z$  pour progresser le long de l'hélice, ce qui fait varier  $\vec{u}_r$ , donc le déplacement élémentaire vérifie

$$d\vec{OM} = d\vec{\ell} = a d\vec{u}_r + h d\theta \vec{u}_z = a d\theta \vec{u}_\theta + h d\theta \vec{u}_z \quad \text{d'où} \quad \boxed{d\ell = \sqrt{a^2 + h^2} d\theta}.$$

Le vecteur tangent est donné (comme dans le cas de la base de Frenet), par

$$\vec{u} = \frac{d\vec{\ell}}{d\theta} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{u} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \vec{u}_\theta + \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \vec{u}_z}.$$

12. Le mouvement du point  $M$  a pour vitesse en cylindriques

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z \quad \text{avec} \quad r = a = \text{constante}, \quad \dot{\theta} = \Omega \quad \text{et} \quad \dot{z} = V \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{V} = a\Omega \vec{u}_\theta + V\vec{u}_z}.$$

13. On en déduit

$$(\vec{V} \cdot \vec{u}) \vec{u} = \frac{a^2 \Omega + hV}{\sqrt{a^2 + h^2}} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \vec{u}_\theta + \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \vec{u}_z \right) = \frac{a^2 \Omega + hV}{a^2 + h^2} (a\vec{u}_\theta + h\vec{u}_z) \quad \text{d'où}$$

$$\begin{aligned} d\vec{F}_v &= -4\pi\eta\sqrt{a^2 + h^2} d\theta \left( \left( 2a\Omega - \frac{a^3\Omega + ahV}{a^2 + h^2} \right) \vec{u}_\theta + \left( 2V - \frac{a^2h\Omega + h^2V}{a^2 + h^2} \right) \vec{u}_z \right) \\ &= -4\pi\eta\sqrt{a^2 + h^2} d\theta \left( \frac{a^3\Omega + 2ah^2\Omega - ahV}{a^2 + h^2} \vec{u}_\theta + \frac{2a^2V - a^2h\Omega + h^2V}{a^2 + h^2} \vec{u}_z \right) \end{aligned}$$

1. L'objet n'étant pas sphérique, on pourrait être tenté d'écrire aussi :  $Re = \frac{\ell_f V_{\text{max}} \rho}{\eta} \approx 7 \times 10^{-4} \ll 1$ , ce qui est toujours acceptable.

Par linéarité de l'intégrale, on obtient en sortant tout ce qui est constant de l'intégrale :

$$\vec{F}_v = -4\pi\eta\sqrt{a^2 + h^2} \left( \frac{a^3\Omega + 2ah^2\Omega - ahV}{a^2 + h^2} \int_0^{\ell_f/h} d\theta \vec{u}_\theta + \frac{2a^2V - a^2h\Omega + h^2V}{a^2 + h^2} \vec{u}_z \int_0^{\ell_f/h} d\theta \right)$$

Étant donné que l'intégration porte sur un nombre entier de tours, on obtient

$$\int_0^{\ell_f/h} d\theta \vec{u}_\theta = \vec{0},$$

car sur chaque tour on a  $\vec{u}_\theta(\theta)$  annulé par  $\vec{u}_\theta(\theta + \pi) = -\vec{u}_\theta(\theta)$ . Il ne reste donc que la composante selon  $\vec{u}_z$  :

$$\vec{F}_v = -4\pi\eta\ell_f \frac{2a^2V - a^2h\Omega + h^2V}{h\sqrt{a^2 + h^2}} \vec{u}_z = -4\pi\eta\ell_f \frac{2a^2 + h^2}{h\sqrt{a^2 + h^2}} V \vec{u}_z + 4\pi\eta\ell_f \frac{a^2\Omega}{\sqrt{a^2 + h^2}} \vec{u}_z$$

On identifie deux termes de signes opposés. Le premier s'oppose au mouvement de translation de vitesse  $V\vec{u}_z$ , c'est donc une traînée

$$T\vec{u}_z = -4\pi\eta\ell_f \frac{2a^2 + h^2}{h\sqrt{a^2 + h^2}} V \vec{u}_z.$$

Le second est dans le sens de  $+\vec{u}_z$  et proportionnel à la vitesse de rotation, c'est donc un terme de propulsion :

$$P\vec{u}_z = 4\pi\eta\ell_f \frac{a^2\Omega}{\sqrt{a^2 + h^2}} \vec{u}_z.$$

14. On fait le rapport entre les deux forces de traînée s'exerçant respectivement sur le flagelle et sur la sphère :

$$\frac{T}{6\pi\eta RV} = \frac{2\ell_f}{3R} \frac{2a^2 + h^2}{h\sqrt{a^2 + h^2}} \approx 29 \gg 1.$$

**On peut donc négliger la force de traînée sur le corps par rapport à celle sur le flagelle.**

15. En régime stationnaire on a

$$T + P = 0 \Leftrightarrow -4\pi\eta\ell_f \frac{2a^2 + h^2}{h\sqrt{a^2 + h^2}} V + 4\pi\eta\ell_f \frac{a^2\Omega}{\sqrt{a^2 + h^2}} = 0 \Leftrightarrow V = \frac{ha^2}{2a^2 + h^2} \Omega.$$

16. On obtient  $V = 31 \mu\text{m.s}^{-1}$ . Cette vitesse est bien inférieure à la vitesse  $V_{\max}$  obtenue précédemment. La vitesse de sédimentation était  $V_\infty \approx 0,02 \mu\text{m.s}^{-1}$ , elle est donc bien négligeable par rapport à la vitesse de nage de la bactérie.