

Concours blanc 1
Optique et électrocinétique *Durée : 4 heures*

La calculatrice est **autorisée**.

Tout résultat doit être justifié et non affirmé (de manière complète ET concise). Sauf contre-indication, les résultats doivent être donnés sous forme littérale avant de passer à l'application numérique éventuelle. Celle-ci sera toujours donnée avec une unité.

Le candidat peut introduire des notations qui lui sont propres dans ces calculs mais ils devront être clairement définies et ne devront pas apparaître dans le résultat final.

I Observation de Mars

Le 1er décembre 2022, la planète Mars (de rayon $R_M = 3,4 \cdot 10^3$ km) est passée au plus près de la Terre. On souhaite observer Mars dans cette configuration. On suppose que les orbites de la Terre et de Mars autour du Soleil sont circulaires et coplanaires. On donne $d_{TS} = 1,5 \cdot 10^7$ km et $d_{MS} = 2,3 \cdot 10^7$ km les rayons respectifs de ces orbites.

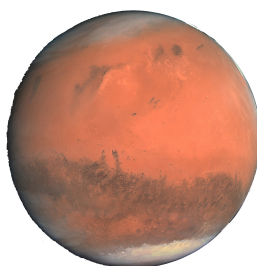


FIGURE 1 – La planète Mars.

1. Quelle distance d sépare la Terre et Mars lorsque celles-ci sont au plus proche ?
2. En déduire le diamètre angulaire apparent α de Mars au niveau de la surface de la Terre. Est-ce suffisant pour une observation à l'œil nu ? On rappelle que la limite de résolution angulaire de l'œil vaut $\varepsilon \simeq 5 \cdot 10^{-4}$ rad.

Pour grossir l'image de Mars, on utilise une lunette astronomique de KEPLER constituée d'un objectif, assimilé à une lentille mince \mathcal{L}_1 convergente de distance focale $f'_1 = \overline{O_1F'_1} > 0$, et d'un oculaire, assimilé à une lentille mince \mathcal{L}_2 convergente de distance focale $f'_2 = \overline{O_2F'_2} > 0$. Ces deux lentilles ont même axe optique noté Δ et sont positionnées tel que $\overline{O_1O_2} > 0$.

On supposera que Mars est située à l'infini de la lunette et on souhaite obtenir une image finale à l'infini pour une observation sans accommodation par un œil emmétrope. On notera $\overrightarrow{A_1B_1}$ l'image intermédiaire.

3. Comment qualifie-t-on un système qui donne une image à l'infini d'un objet à l'infini ?
4. Que peut-on dire de la position de l'image intermédiaire par rapport à \mathcal{L}_1 ? Et par rapport à \mathcal{L}_2 ? Que cela implique-t-il pour la position relative des deux lentilles ? On précisera ce que doit valoir $\overline{O_1O_2}$.
5. Sur votre copie, faire un grand schéma de la lunette en prenant $f'_1 = 4f'_2 = 8$ cm et dessiner la marche d'un rayon arrivant parallèle à l'axe optique à une distance $d = 3$ cm.

6. La planète ayant un diamètre apparent α , dessiner la marche d'un faisceau de trois rayons incidents inclinés d'un angle $\alpha \simeq 20^\circ$ par rapport à l'axe optique (on conservera les mêmes valeurs de f'_1 et f'_2 qu'à la question 5. pour le schéma). Justifier la construction.
On notera α' l'angle que forme le faisceau de rayons émergents par rapport à l'axe optique en sortie de la lunette.
7. Rappeler ce que sont les conditions de GAUSS. Qu'est-ce que cela implique pour les angles α et α' ?
8. On caractérise la lunette par son grossissement

$$G = \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right|$$

Déterminer l'expression G en fonction de f'_1 et f'_2 .

9. Quelle doit être la valeur de G pour que le diamètre apparent de l'image par la lunette soit identique à celui sous lequel vous pouvez observer la photo de Mars présente en figure 1 de l'énoncé, à une distance de 50 cm ?

II Distances focales et aberrations chromatiques

Un des inconvénients d'une lunette astronomique par rapport aux télescopes (composés de miroirs) est que les lentilles génèrent des défauts d'aberrations chromatiques. Il s'agit d'un défaut de formation des images dû à la dispersion de la lumière par le verre composant les lentilles (ce défaut n'existe donc pas pour les miroirs !) et dont l'indice optique dépend largement de la longueur d'onde du rayonnement lumineux . Nous nous intéresserons à ce phénomène dans ce problème.

II.1 Objectif achromatique

On rappelle que la vergence d'une lentille est l'inverse de sa distance focale image. On admettra que la vergence V d'une lentille mince sphérique est donnée par la relation algébrique

$$V = (n - 1) \left(\frac{1}{\overline{R_1}} - \frac{1}{\overline{R_2}} \right)$$

où n est l'indice de réfraction du verre constituant la lentille et $\overline{R_1}$ et $\overline{R_2}$ les rayons de courbure algébriques $\overline{R_i} = \overline{S_i C_i}$ respectivement des faces d'entrée et de sortie de la lentille (la notation S représentant le sommet des dioptres sphériques et C leur centre, voir figure 2).

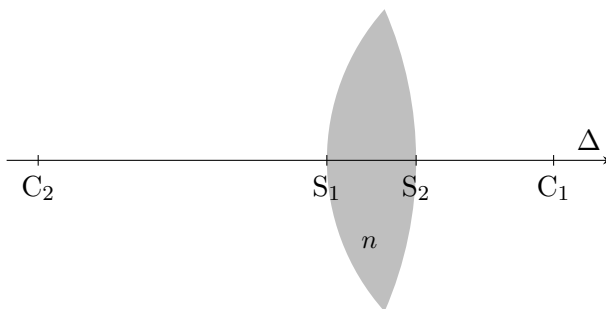


FIGURE 2 – Lentille mince sphérique biconvexe, d'indice n et d'axe optique Δ . Le dioptré d'entrée est numéroté 1 et celui de sortie numéroté 2.

L'indice n varie avec la longueur d'onde λ suivant la loi empirique de CAUCHY

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

A et B étant deux constantes positives. Pour un verre de type crown, $A = 1,515$ et $B = 3,5 \cdot 10^3 \text{ nm}^2$.

On note n_B , n_J et n_R les indices du verre pour les radiations B (bleu : $\lambda_B = 486 \text{ nm}$), J (jaune : $\lambda_J = 589 \text{ nm}$) et R (rouge : $\lambda_R = 656 \text{ nm}$). On notera f'_B , f'_J et f'_R les distances focales images et F'_B , F'_J et F'_R les foyers principaux images de la lentille pour les radiations B , J et R respectivement.

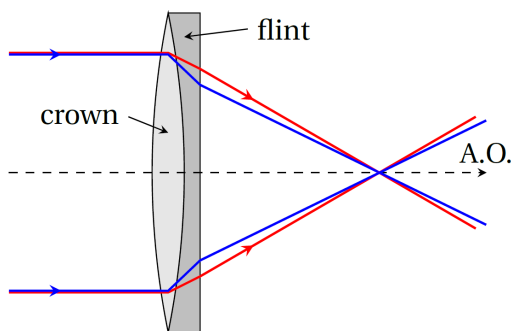
Une lentille mince (\mathcal{L}), en verre de crown, est biconvexe avec des rayons de courbure $\overline{R_1} = 90 \text{ cm}$ et $\overline{R_2} = -150 \text{ cm}$.

1. Calculer les indices n_B , n_J et n_R . On justifiera que les résultats doivent être donnés avec 4 chiffres significatifs.
2. Déterminer la distance focale f'_J de (\mathcal{L}). Elle sera considérée comme étant la distance focale moyenne de la lentille.

Deux lentilles minces (\mathcal{L}_c) convergente et (\mathcal{L}_d) divergente sont éclairées, parallèlement à l'axe optique, par un faisceau de lumière blanche.

3. Que dire du signe de V pour une lentille convergente puis une lentille divergente ? En déduire les positions relatives de F'_B et F'_R pour (\mathcal{L}_c) puis (\mathcal{L}_d).
4. Faire deux schémas pour (\mathcal{L}_c) et (\mathcal{L}_d) et tracer sur chacun le cheminement des rayons lumineux B et R émergents en précisant pour chacune des deux lentilles la position relative des foyers F'_B et F'_R (on ne calculera pas leur position exacte, on souhaite juste faire un schéma de principe).

On réalise un objectif achromatique mince en accolant après la lentille (\mathcal{L}) précédente biconvexe, de rayons de courbures $\overline{R_1}$ et $\overline{R_2}$ en verre crown, une lentille (\mathcal{L}'), concave-plan en verre de type flint, de sorte que les faces en contact aient le même rayon de courbure $\overline{R_2}$ (le rayon de courbure correspondant au dioptré plan est infini). Les indices de réfraction des deux verres sont donnés par la loi de CAUCHY avec $A_1 = 1,515$ et $B_1 = 3,5 \cdot 10^3 \text{ nm}^2$ pour le crown et A_2 et B_2 à déterminer pour le verre flint.



5. Montrer, à l'aide de la relation de conjugaison de DESCARTES, que la vergence V d'une association de deux lentilles minces accolées est égale à la somme des vergences individuelles V_1 et V_2 .
6. Exprimer les vergences V_1 et V_2 respectivement des lentilles (\mathcal{L}) et (\mathcal{L}') en fonction des constantes A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , des rayons R_1 et R_2 et de λ .
En déduire la vergence V des deux lentilles accolées.

7. Calculer l'expression de $\frac{dV}{d\lambda}$. Que doit valoir cette expression pour s'affranchir des aberrations chromatiques ?
En déduire une relation entre B_1 , B_2 , R_1 et R_2 puis exprimer la vergence V en fonction de A_1 , A_2 , R_1 et R_2 .
8. Calculer les constantes A_2 et B_2 pour une vergence V de l'objectif égale à $0,5 \text{ m}^{-1}$.

II.2 Méthode de Bessel

Pour mesurer avec précision une distance focale, on utilise la méthode de BESSEL. Un objet \overrightarrow{AB} et un écran (E) sont fixes et distants de D . Entre l'objet et l'écran, on place une lentille convergente (\mathcal{L}) de distance focale $f' = \overline{OF'} > 0$ pour obtenir sur (E) une image nette $\overrightarrow{A'B'}$.

On notera $AO = x > 0$ la distance non algébrique séparant l'objet et le centre optique de la lentille.

9. Sur votre copie, faire un schéma simple du dispositif en prenant $f' \simeq 2 \text{ cm}$, $x \simeq 7 \text{ cm}$ et $\overline{AB} \simeq 4 \text{ cm}$.
On tracera notamment les rayons lumineux permettant de déterminer l'image $\overrightarrow{A'B'}$ de \overrightarrow{AB} .
10. Rappeler la relation de conjugaison de DESCARTES en fonction de \overline{OA} , $\overline{OA'}$ et f' puis l'exprimer en fonction de D , x et f' .
11. Montrer que si $D > D_{\min}$, valeur minimale que l'on exprimera en fonction de f' , alors il existe deux positions distinctes x_1 et x_2 (avec $x_1 < x_2$) de la lentille pour lesquelles une image nette se forme sur l'écran.
12. Donner les expressions de x_1 et x_2 en fonction de D et f' . À quelle condition y a-t-il une unique position permettant de former une image nette ?

On note $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ le grandissement transverse du dispositif.

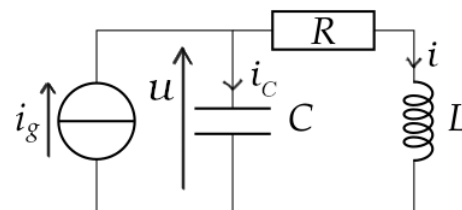
13. Déterminer l'expression de γ en fonction de D et x . Pour quelle position x_1 ou x_2 l'image est-elle la plus grande ? Que dire de son signe ? L'image est-elle droite ou renversée ?
14. On note $d = x_2 - x_1$ la distance entre les deux positions de la lentille lorsque $D > D_{\min}$. Établir l'expression de la distance focale f' en fonction de D et d .
15. Calculer la distance focale f' sachant que $D = 90 \text{ cm}$ et $d = 30 \text{ cm}$.

III Alimentation d'un moteur

Un moteur peut être modélisé par une bobine réelle d'inductance L et de résistance interne R . Pour éviter l'apparition d'une surtension éventuelle lors de l'allumage du moteur (dont les causes ne seront pas discutées ici), il est usuel de lui associer un condensateur en parallèle.

III.1 Étude en régime transitoire

Un générateur de courant idéal délivre un échelon de courant $i_g(t > 0) = I_0$ et $i_g(t < 0) = 0$ dans le circuit ci-contre. Le générateur étant éteint depuis longtemps pour $t < 0$, tous les courants sont initialement nuls, et la capacité C est déchargée.



1. Montrer que pour $t > 0$, le courant $i(t)$ parcourant la bobine vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 I_0.$$

Donner le nom et l'expression des paramètres ω_0 et Q .

2. Quels sont les types de comportements possibles pour la solution générale de l'équation homogène selon la valeur de Q ? Pour chaque cas, on précisera la forme mathématique de la solution générale, en introduisant les grandeurs adéquates, sans chercher à calculer les constantes d'intégration.
3. Établir les conditions initiales $i(t = 0^+)$ et $\frac{di}{dt}(t = 0^+)$

L'intensité du courant parcourant la bobine est enregistrée grâce à un logiciel d'acquisition, et représentée en figure (3).

4. D'après ce graphe, quelle relation doit être vérifiée par les paramètres R , L et C ?
5. Résoudre l'équation différentielle et donner l'expression complète de $i(t)$.
6. Évaluer la pseudo-pulsation ω , puis estimer approximativement le temps caractéristique d'atténuation τ et la valeur de Q . On expliquera clairement la démarche.
7. Représenter graphiquement l'allure temporelle du courant $i_c(t)$ en vous inspirant du graphe ci-contre.
8. En déduire une interprétation physique (simple) du fait que la capacité permet d'éviter une surtension aux bornes du moteur.

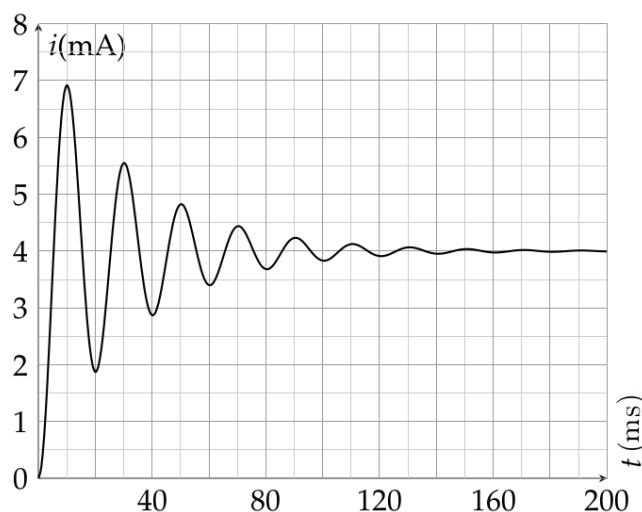


FIGURE 3 – Chronogramme de l'intensité parcourant le moteur.

III.2 Étude en régime sinusoïdal forcé

On remplace dans le dispositif précédent (moteur + condensateur) la source de courant continu par une source délivrant une intensité de la forme :

$$i_g(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t).$$

Dans cette partie, on se placera en régime sinusoïdal forcé, et on introduira la notation complexe.

9. Établir l'expression de l'amplitude complexe \underline{I} associée au courant $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$ traversant la bobine, en fonction de R , L , C , ω et I_0 . Puis la ré-exprimer en fonction des paramètres ω_0 et Q introduits dans la première partie.
10. Montrer qu'il y a un phénomène de résonance pour $i(t)$ à une condition sur Q que l'on précisera. Que vaut alors la pulsation de résonance ω_r ?
11. Tracer le graphe représentant l'allure de l'amplitude I en fonction de la pulsation ω .
12. Déterminer le déphasage φ de l'intensité $i(t)$ par rapport à $i_g(t)$, puis représenter graphiquement l'allure de l'évolution de φ en fonction de la pulsation ω .
13. Le chronogramme représenté en figure (4) représente l'allure des courants dans les conditions d'utilisation du moteur. Exploiter ces courbes pour déterminer la valeur de φ , puis celles de Q et ω_0 . Ces dernières sont-elles compatibles avec les résultats trouvés en 6.?
14. On mesure aussi la tension efficace $U_e = 19\text{ V}$ aux bornes du moteur, ainsi qu'un déphasage $\psi = 37^\circ$ entre cette tension et le courant qui le traverse. En déduire les valeurs de R et de L .

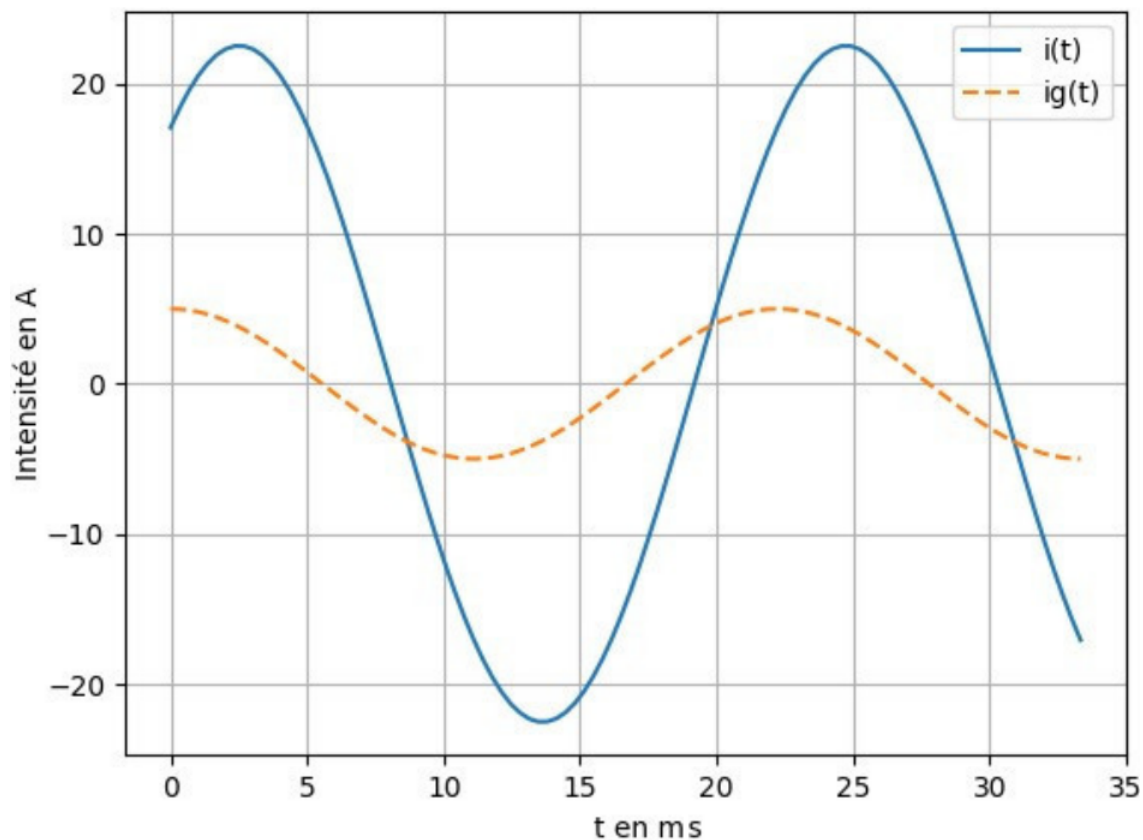


FIGURE 4 – Chronogramme des intensités débitée par le générateur ($i_g(t)$) et parcourant le moteur ($i(t)$).

15. Montrer que la puissance moyenne \mathcal{P}_m consommée par le montage { moteur + condensateur } est égale à la puissance moyenne consommée par la résistance R .
16. Exprimer cette puissance. Pour quelle pulsation serait-elle maximale? Donner l'expression de ce maximum.
17. Évaluer numériquement cette puissance maximale. Faire de même pour la puissance effectivement consommée dans les conditions d'utilisation de la figure (4).

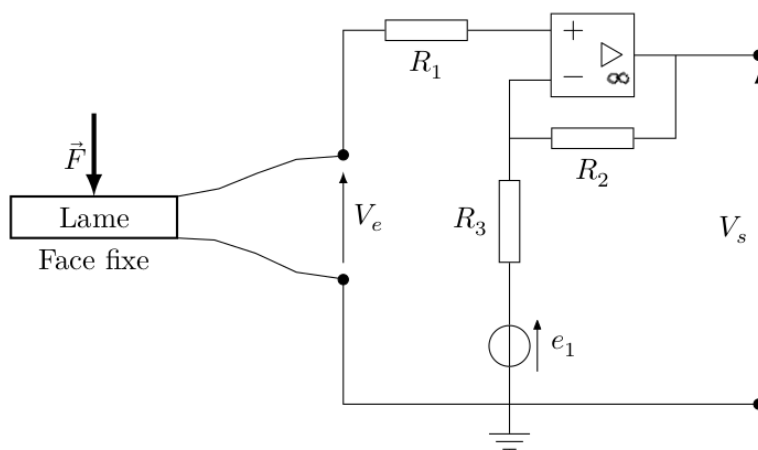
IV Capteur de forces piézoélectrique

Les matériaux piézoélectriques ont la capacité de voir apparaître une différence de potentiel entre leurs faces lorsqu'on exerce sur elles une contrainte mécanique (effet direct), mais également de pouvoir se déformer sous l'action d'une différence de potentiel imposée (effet inverse). Cela en fait des matériaux très intéressants sur le plan des applications. On étudie ici l'utilisation dans un capteur de force.

Les montages ci-après utilisent des Amplificateurs Linéaires Intégrés (ALI, ou Amplificateurs Opérationnels, AO) supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire.

IV.1 Mesure de l'intensité d'une force s'exerçant sur une lame piézoélectrique

On suppose qu'une force \vec{F} régulièrement répartie est exercée sur la face de la lame, celle-ci entraînant l'apparition d'une tension V_e à ses bornes et de deux charges opposées $+q$ et $-q$ sur les faces de la lame. La charge q est liée à V_e ainsi qu'à la force \vec{F} exercée de sorte que $q = CV_e = KF$ où C , K et F représentent respectivement une capacité, une constante de proportionnalité et la valeur algébrique de la force \vec{F} .



1. Après avoir rappelé le modèle de l'amplificateur linéaire intégré idéal, exprimer la tension V_e en fonction de e_1 , V_s et des différentes résistances.
2. On donne : $R_1 = 10\text{ k}\Omega$, $R_2 = 6,5\text{ k}\Omega$, $R_3 = 1,0\text{ k}\Omega$ et $e_1 = 100\text{ mV}$. On mesure $V_s = 6,50\text{ V}$, en déduire V_e .
Sachant que $C = 8,0 \times 10^{-13}\text{ F}$ et que $K = 1,0 \times 10^{-12}\text{ C}\cdot\text{N}^{-1}$, déterminer l'intensité de la force \vec{F} s'exerçant sur la lame.

IV.2 Mesure de la fréquence d'une force excitatrice sinusoïdale s'exerçant sur une lame

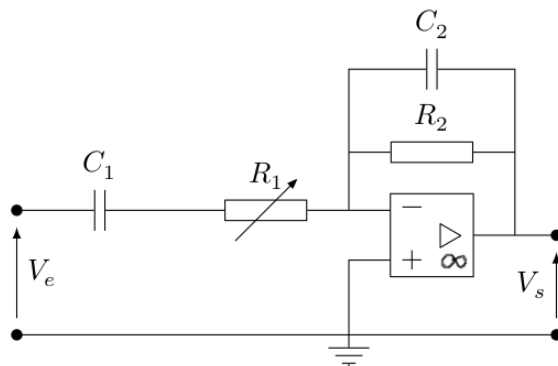
On considère que la lame est soumise à une action mécanique variant sinusoïdalement dans le temps à la fréquence f , fréquence que l'on se propose de déterminer à l'aide du montage de la figure ci-contre.

3. Déterminer l'expression de la fonction de transfert du filtre de la figure ci-contre. et la mettre sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{A}{1 + j(\omega/\omega_1 - \omega_2/\omega)}$$

en précisant les expressions de A , ω_1 et ω_2 en fonction de R_1 , R_2 , C_1 et C_2 .

4. Indiquer quelle est la nature de ce filtre, en justifiant.
5. Montrer que le gain passe par un maximum pour une pulsation ω que l'on exprimera en fonction de ω_1 et ω_2 .



On ajuste à présent la résistance R_1 de manière à ce que les signaux d'entrée et de sortie soient en opposition de phase.

6. Comment peut-on vérifier expérimentalement que les deux signaux sont en opposition de phase ? Indiquer quel matériel peut être utilisé pour cette opération et comment le relier au montage.
7. Déterminer la fréquence de la contrainte s'exerçant sur la lame. Calculer sa valeur numérique sachant que $R_2 = 1,0 \times 10^2 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 50 \text{ nF}$, $C_2 = 5,0 \text{ nF}$ et qu'il a fallu régler R_1 à $10 \text{ k}\Omega$ de manière à ce que les deux signaux soient en opposition de phase.

— Fin de l'énoncé —