

Concours blanc 1: Correction

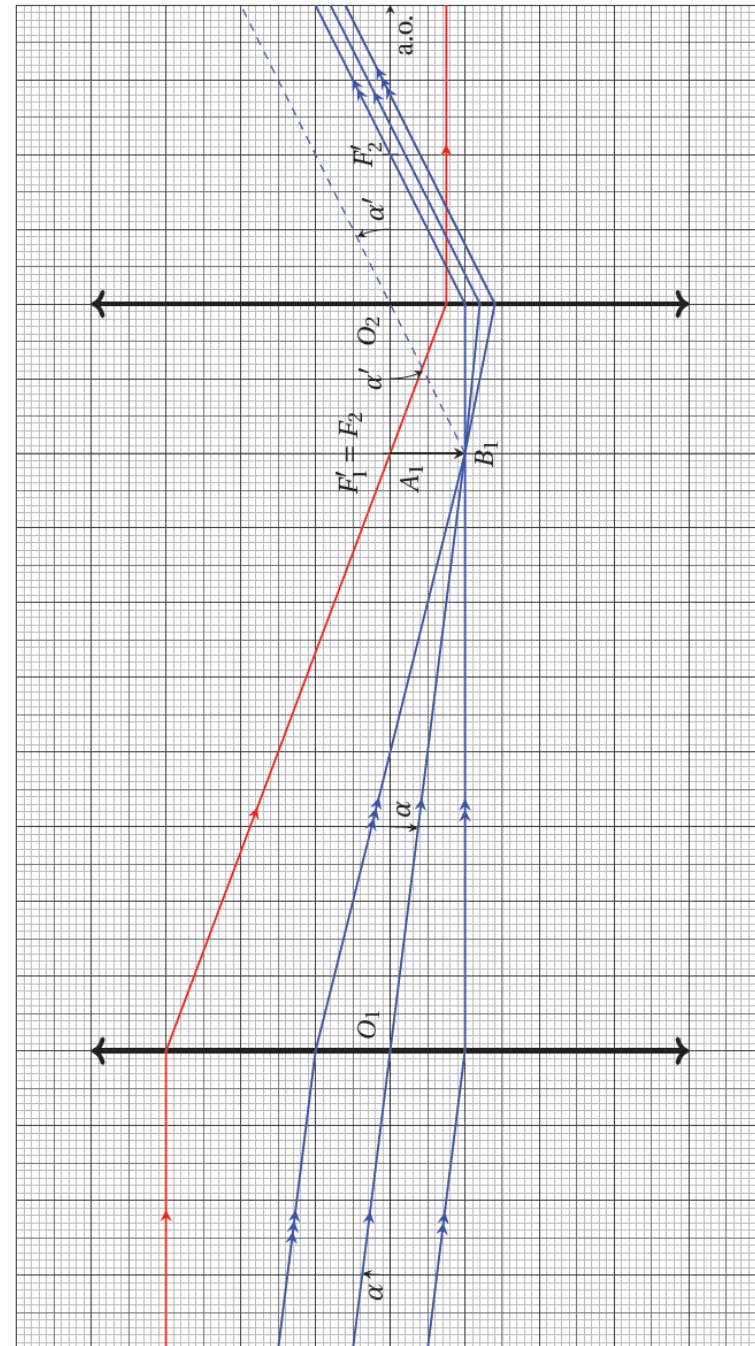
I Observation de Mars

1. Lorsque le Soleil, la Terre et Mars sont alignées, les deux planètes sont séparées d'une distance $d = d_{MS} - d_{TS} = 8.10^9$ m.
2. Depuis la Terre, la taille transverse de Mars correspond à son diamètre $h = 2R$. On en déduit le diamètre apparent

$$\alpha = h/d = 8,5.10^{-4} \text{ rad} > \varepsilon$$

On est juste à la limite de résolution de l'œil. Effectivement, on peut observer Mars à l'œil nu depuis la Terre : il s'agit d'un point lumineux semblable à une étoile plutôt brillante.

3. Un système qui donne une image à l'infini d'un objet à l'infini est un système afocal.
4. Comme l'objet est à l'infini, son image par \mathcal{L}_1 sera dans son plan focal image : $A_1 = F'_1$. Pour obtenir une image finale à l'infini, il faut que l'objet intermédiaire se trouve dans le plan focal objet de \mathcal{L}_2 : on doit avoir $A_1 = F_2$. Finalement, on trouve $F'_1 = F_2$: le plan focal image de \mathcal{L}_1 est confondu avec le plan focal objet de \mathcal{L}_2 . On en déduit $\overline{O_1O_2} = f'_1 + f'_2$.
5. Marche d'un rayon parallèle à l'axe optique : après avoir traversé la première lentille, le rayon émerge en passant par le foyer image F'_1 . Or, $F'_1 = F_2$, donc ce rayon émerge de la deuxième lentille parallèlement à l'axe optique.



6. Voir graphe ci-dessus pour le tracé d'un faisceau incliné d'un angle α .

L'image, par la première lentille, d'un objet à l'infini se forme dans plan focal image de cette lentille. Le rayon lumineux incliné d'un angle α et passant par O_1 n'étant pas dévié par la première lentille, il permet de placer l'image intermédiaire A_1B_1 . Tous les rayons incidents, inclinés de ce même angle α , émergeront de la première lentille en passant par B_1 .

On reprend alors la suite de la construction à partir de A_1B_1 , dont on cherche l'image par la deuxième lentille. A_1B_1 étant situé dans le plan focal objet de la deuxième lentille, son image par celle-ci se situe à l'infini. Les rayons lumineux qui émergeront de cette lentille seront donc tous parallèles entre eux. Pour trouver leur direction commune (α'), on peut s'aider du rayon lumineux non-dévié venant de B_1 et passant par O_2 .

7. Un système optique est utilisé dans les conditions de GAUSS lorsque les rayons incidents sont peu inclinés et de point d'incidence proche de l'axe optique (rayons paraxiaux). Dans ces conditions, $\alpha \ll 1$ et $\alpha' \ll 1$.

8. Sur le tracé, on observe que $\tan \alpha = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_1F'_1}}$. De même,

$\tan \alpha' = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_2F_2}}$. Les angles étant petits, on peut faire l'approximation $\tan \alpha \simeq \alpha$ et on obtient

$$G = \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| = \left| \frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{O_2F_2}} \right| = \frac{f'_1}{f_2}.$$

9. Le diamètre de Mars sur la photo vaut environ 3,1 cm. On l'observe à environ 50 cm. On souhaite donc obtenir $\alpha' = 3,1/50 = 6,2 \cdot 10^{-2}$ rad. On en déduit le grossissement $G = 73$.

II Distances focales et aberrations chromatiques

II.1 Objectif achromatique

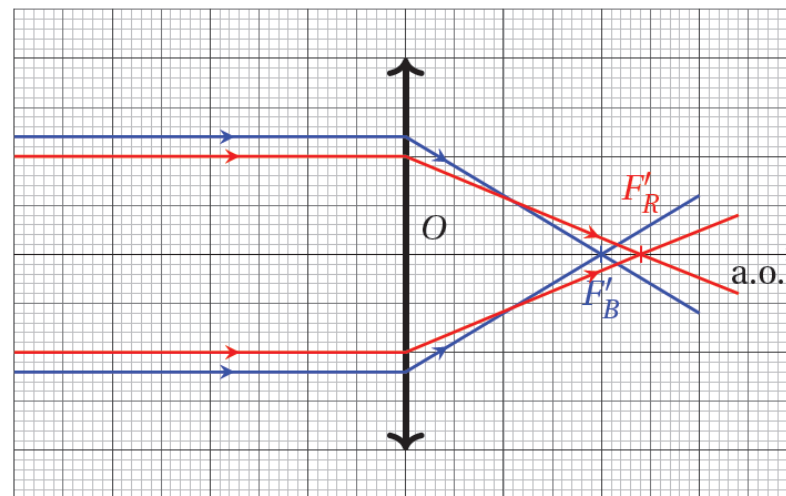
- On utilise la loi de CAUCHY : $n_B = 1,530$, $n_J = 1,525$ et $n_R = 1,523$. On prend deux chiffres significatifs pour le terme B/λ^2 , qui est 100 fois plus petit que A, d'où les 4 chiffres significatifs résultants.
- On calcule $V_j = 0,93 \delta$ donc $f'_j = 1,1$ m.
- Pour une lentille convergente $V > 0$. Pour une lentille divergente, $V < 0$.

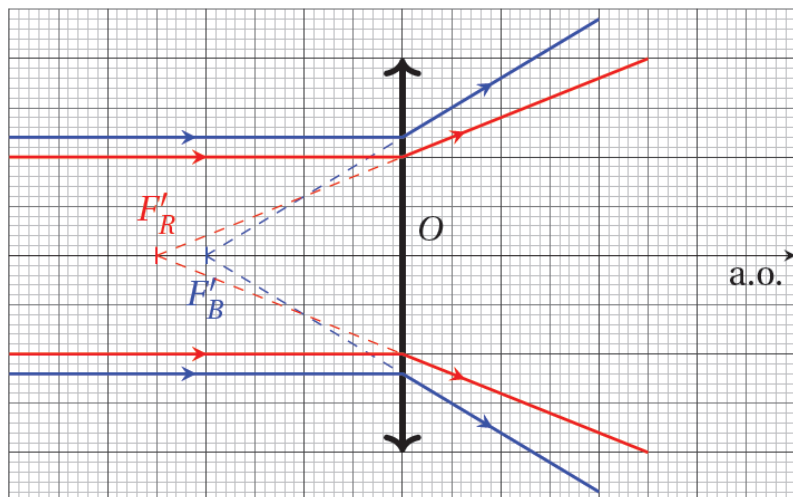
Comme n décroît lorsque λ augmente (cf. loi de Cauchy), et que $n - 1 > 0$, on en déduit que $|V| = (n - 1)|\Delta R|$ décroît lorsque λ augmente. Donc $|f'| = 1/|V|$ croît lorsque λ augmente. Ainsi,

$$|f'_R| > |f'_B|.$$

Pour une lentille convergente, F'_R sera alors en arrière de F'_B (les deux étant après le centre optique de la lentille). Pour une lentille divergente, F'_R sera en avant de F'_B (les deux étant situés avant le centre optique de la lentille).

4. Aberration chromatique





5. On note $A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_i \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'$ les images successives par deux lentilles d'un point A sur l'axe optique. La relation de DESCARTES s'écrit $\frac{1}{O_1 A_i} - \frac{1}{O_1 A} = V_1$ pour \mathcal{L}_1 et $\frac{1}{O_2 A'} - \frac{1}{O_2 A_i} = V_2$ pour \mathcal{L}_2 .

Si les deux lentilles minces sont accolées, on a $O_1 = O_2$ que l'on note simplement O . On peut donc sommer les deux relations et on obtient

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = V_1 + V_2$$

qui est la même relation que celle que l'on obtiendrait pour une unique lentille de centre O et de vergence $V_1 + V_2$.

6. On a $V_1 = \left(A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ et

$$V_2 = \left(A_2 + \frac{B_2}{\lambda^2} - 1\right) \left(\frac{1}{R_2} + 0\right).$$

Comme $V = V_1 + V_2$ on en déduit

$$V = \frac{1}{R_2} \left(A_2 - A_1 + \frac{B_2 - B_1}{\lambda^2}\right) + \frac{1}{R_1} \left(A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2} - 1\right)$$

7. On dérive par rapport à λ : $\frac{dV}{d\lambda} = -\frac{2(B_2 - B_1)}{R_2 \lambda^3} - \frac{2B_1}{R_1 \lambda^3}$. Pour s'affranchir des aberrations chromatiques, il faut que cette grandeur soit **nulle** pour que la vergence varie peu au voisinage de λ . On trouve alors $dV/d\lambda = 0$ pour tout λ , ainsi V est indépendant de λ .

On en déduit $(B_2 - B_1)\overline{R_1} + B_1\overline{R_2} = 0$.

On remplace $B_2 - B_1$ dans l'expression de V :

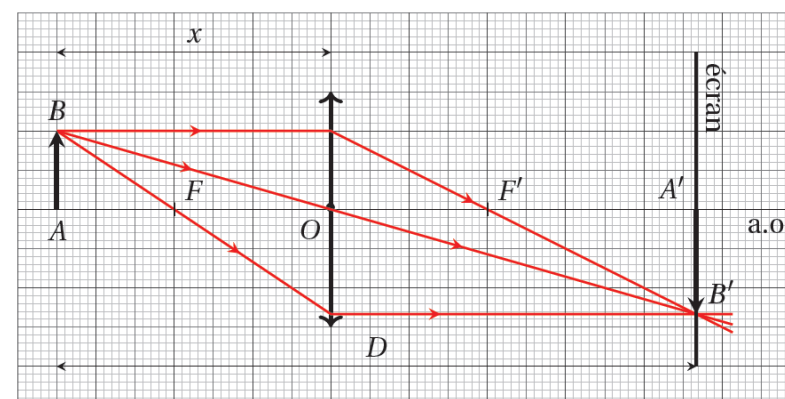
$$V = \frac{1}{R_2} (A_2 - A_1) - \frac{B_1}{R_1 \lambda^2} + \frac{1}{R_1} \left(A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2} - 1\right) = \frac{A_2 - A_1}{R_2} + \frac{A_1 - 1}{R_1}.$$

8. On isole $A_2 = A_1 + \overline{R_2} \left(V - \frac{A_1 - 1}{R_1}\right) = 1,623$ et

$$B_2 = B_1 \left(1 - \frac{\overline{R_2}}{R_1}\right) = 9,3 \cdot 10^3 \text{ nm}^2.$$

II.2 Méthode de Bessel

9. Schéma pour la méthode de Bessel



10. Relation de conjugaison de DESCARTES : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f}$ donc

$$\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

11. On manipule l'expression précédente pour obtenir le polynôme $Df' = (D-x)x \Leftrightarrow x^2 - Dx + Df' = 0$. Ce polynôme admet des solutions réelles ssi son discriminant est positif :

$$\Delta = D^2 - 4Df' = D(D - 4f')$$

Ce dernier est positif ssi $D \geq 4f' = D_{\min}$.

12. Dans ce cas, les racines sont $x_1 = \frac{D}{2} - \frac{1}{2}D\sqrt{1 - 4f'/D}$ et $x_2 = \frac{D}{2} + \frac{1}{2}D\sqrt{1 - 4f'/D}$. Ces deux positions sont confondues si le discriminant est nul, c'est-à-dire lorsque $D = D_{\min}$.

13. On utilise la relation $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{D-x}{-x} = 1 - \frac{D}{x}$. Comme $0 < x < D$, $D/x > 1$ et on trouve que $\gamma < 0$: l'image est renversée. L'image est d'autant plus grande que $|\gamma| = \frac{D}{x} - 1$ est grand, donc que x est petit : l'image est plus grande en x_1 qu'en x_2 .

14. On calcule $d = x_2 - x_1 = D\sqrt{1 - 4f'/D} \Rightarrow d^2 = D^2 - 4f'D \Leftrightarrow f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$.

15. A.N. : $f' = 0, 20 \text{ m}$.

III Alimentation d'un moteur

III.1 Étude en régime transitoire

1. En utilisant la loi des nœuds et l'additivité des tensions :

$$\forall t, i_g = I_0 = i_c + i = C \frac{du}{dt} + i = C \frac{d}{dt} \left(Ri + L \frac{di}{dt} \right) + i \quad \text{d'où}$$

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = I_0 \Leftrightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 I_0$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}},$$

respectivement la **pulsation propre** et le **facteur de qualité**.

2. Le second membre étant constant, on cherche une solution particulière i_P constante, d'où

$$0 + 0 + \omega_0 i_P = \omega_0^2 I_0 \Leftrightarrow i_P = I_0.$$

La solution générale s'écrit donc $\forall t > 0, i(t) = I_0 + i_H(t)$ où la solution $i_H(t)$ de l'équation homogène associée dépend du signe du discriminant de l'équation caractéristique

$$\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right),$$

du temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R}$, et de deux constantes d'intégration réelles A et B .

- Régime **pseudo-périodique** si $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$:

$$i_H(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)) \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

- Régime **critique** si $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$:

$$i_H(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A_2 t + B_2).$$

- Régime **apériodique** si $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$:

$$i_H(t) = A_3 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B_3 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad \text{en notant} \quad \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau} + \omega, \quad \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau} - \omega$$

$$\text{et} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}.$$

3. Le courant i à travers la bobine et la tension u aux bornes du condensateur doivent évoluer de façon continue. Donc

$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \quad \text{et}$$

$$\begin{cases} u(0^+) = u(0^-) = 0 \\ = Ri(0^+) + L \frac{di}{dt}(0^+) \end{cases} \Rightarrow \frac{di}{dt}(0^+) = 0.$$

4. L'allure de $i(t)$ témoigne d'oscillations donc le régime est pseudo-périodique :

$$Q > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

5. On applique les conditions initiales ci-dessus :

$$\text{D'abord } i(0^+) = 0 \Leftrightarrow 0 = I_0 + A \Leftrightarrow A = -I_0, \text{ puis}$$

$$\frac{di}{dt}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\left(-\frac{A}{\tau} + B\omega\right) \cos(\omega t) + \left(\frac{B}{\tau} - A\omega\right) \sin(\omega t) \right) \Rightarrow$$

$$\frac{di}{dt}(0^+) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{A}{\tau} + B\omega \Leftrightarrow B = -\frac{I_0}{\tau\omega}$$

$$\text{Finalement } \boxed{i(t) = I_0 - I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos(\omega t) + \frac{1}{\tau\omega} \sin(\omega t) \right)}$$

6. 1ère méthode : Le graphe permet d'identifier le régime permanent :

$$I_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \underline{4,0 \text{ mA}},$$

et donc les zéros successifs t_{0n} de i_H , tels que $i(t_{0n}) = I_0$, qui sont espacés de la durée $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$. On lit $t_{010} - t_{00} \approx 106 - 5 = 101 \text{ ms}$ d'où

$$t_{010} - t_{00} = \frac{10\pi}{\omega} \Leftrightarrow \boxed{\omega = \frac{10\pi}{t_{010} - t_{00}}} = \underline{3,1 \times 10^2 \text{ rad.s}^{-1}}$$

2ème méthode : On remarque que $\frac{di}{dt}$ est aussi pseudo-périodique de même pseudo-période ω donc **les maxima (resp. minima) successifs de $i(t)$ sont espacés de $T = \frac{2\pi}{\omega}$** . En notant $t_{m,n}$ le n -ième maximum local, on trouve de même $t_{m6} - t_{m0} \approx 130 - 10 = 120 \text{ ms}$ d'où

$$\boxed{\omega = \frac{12\pi}{t_{m6} - t_{m0}}} = \underline{3,1 \times 10^2 \text{ rad.s}^{-1}}$$

Pour évaluer τ et Q , on constate qu'il y a de nombreuses oscillations visibles, donc l'amortissement est faible et donc $\omega \approx \omega_0$. Ainsi

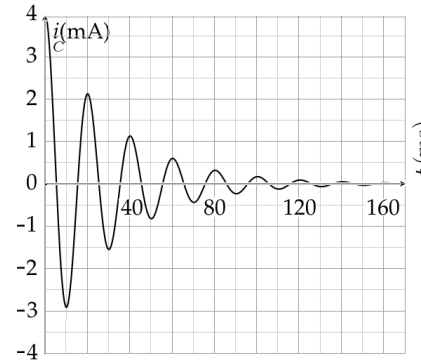
$$Q = \frac{\omega_0\tau}{2} \approx \frac{\omega\tau}{2} = \frac{\pi\tau}{T} \approx \frac{3\tau}{T}$$

correspond au nombre d'oscillations visibles (de plus de 5% de l'excursion totale). Donc $Q \sim 5 - 6$, correspondant à une durée $\tau \approx 0,10 - 0,12 \text{ s}$.

7. La loi des nœuds implique $\forall t > 0, i_C(t) = I_0 - i(t)$ d'où

$$\boxed{i_C(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos(\omega t) + \frac{1}{\tau\omega} \sin(\omega t) \right)}$$

Le graphe de $i_C(t)$ s'obtient donc par symétrie et translation du graphe de $i(t)$ (cf ci-dessous).



8. Comme la figure ci-contre l'indique, la présence du condensateur permet d'absorber une partie du courant du générateur au début, de sorte que le courant dans la bobine augmente moins vite. Les tensions Ri et surtout $L \frac{di}{dt}$ en sont d'autant moins élevées. D'où une surtension plus faible.

III.2 Étude en régime sinusoïdal forcé

9. On introduit les notations complexes $\underline{i}_g(t) = I_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{i}(t) = \underline{I} e^{j\omega t}$ avec $\underline{I} = I e^{j\varphi}$. Il s'agit d'un pont diviseur de courant, donc

$$\underline{I} = \frac{I_0 / (R + j\omega L)}{1 / (R + j\omega L) + j\omega C} = \frac{I_0}{1 + (R + j\omega L) j\omega C}$$

$$\text{d'où } \boxed{\underline{I} = \frac{I_0}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = \frac{I_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

10. Posons $x = \omega/\omega_0 > 0$ la pulsation réduite. Alors l'amplitude

$$I = |\underline{I}| = \frac{I_0}{\sqrt{f(x)}}, \text{ avec } f(x) = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2},$$

admet un maximum en x_r si f est minimale en x_r , donc si $f'(x_r) = 0$ et f' croissante au voisinage de x_r .

$$f'(x) = -4(1 - x^2)x + 2\frac{x}{Q} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

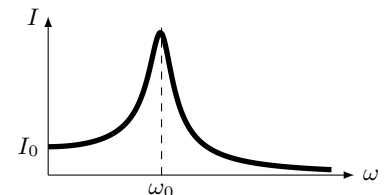
$$\text{Ainsi } i \text{ admet une unique résonance en } \boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \text{ si } \boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

11. Dans le cas présent $Q \sim 5 > \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc on obtient une résonance en $\omega_r \approx \omega_0$,

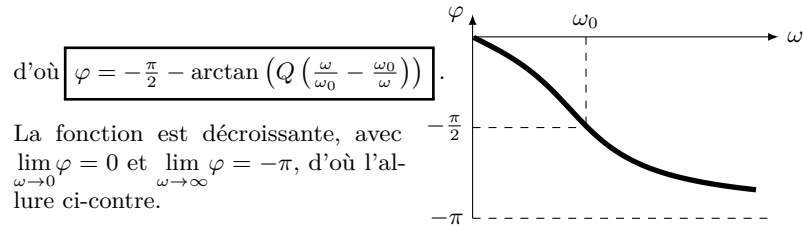
de maximum

$$I_{\max} = \frac{I_0}{\sqrt{f(x_r)}} \approx I_0 Q \approx 5I_0.$$

De plus $\lim_{\omega \rightarrow 0} I = I_0$ et $\lim_{\omega \rightarrow \infty} I = 0$, d'où l'allure ci-contre.



$$12. \varphi = \arg(\underline{I}) = \arg\left(\frac{I_0}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}\right) = -\arg\left(j\frac{x}{Q}\left(1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$



13. En notant respectivement t_1 et t_2 les deux zéros descendant de i_g et i , on lit $t_2 - t_1 \approx 8 - 5,5 = 2,5$ ms, et on mesure une période $T \approx 22$ ms. D'où

$$\omega t_1 = \omega t_2 + \varphi \Leftrightarrow \varphi = -\frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1) = -0,71 \text{ rad} = -41^\circ.$$

Pour trouver les paramètres ω_0 et Q , on a besoin de mesurer aussi le rapport des amplitudes $I/I_0 \approx \frac{22,5}{5} \approx 4,5$. D'après les calculs précédents

$$\begin{cases} \frac{I_0}{I} = \left|j\frac{x}{Q}\left(1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)\right| = \frac{\omega}{Q\omega_0} \sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \end{cases}$$

Introduisons les quantités intermédiaires $X = \frac{Q\omega}{\omega_0}$ et $Y = \frac{Q\omega_0}{\omega}$:

$$\begin{cases} \varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan(X - Y) \\ \frac{I_0}{I} = \frac{1}{Y} \sqrt{1 + (X - Y)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X - Y = -\tan\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 1/\tan\varphi \\ \frac{I_0}{I} = \frac{1}{Y} \sqrt{1 + 1/\tan^2(\varphi)} = \frac{1}{Y|\sin\varphi|} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = \frac{I}{I_0|\sin\varphi|} = 6,9 \\ X = Y + 1/\tan\varphi = 5,7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = \omega \sqrt{\frac{Y}{X}} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{Y}{X}} = 3,1 \cdot 10^2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \\ Q = \sqrt{XY} = 6,3 \end{cases}$$

La valeur de ω_0 correspond bien mais celle de Q s'écarte d'environ 10% de celle obtenue en régime transitoire, ce qui peut être du à la précision de nos déterminations graphiques.

14. Le moteur est un dipôle d'impédance $\underline{Z} = R + j\omega L$, donc

$$\begin{cases} \psi = \arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) \\ \sqrt{2}U_e = |\underline{Z}|I = I\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = \frac{R}{\omega} \tan\psi \\ R = \frac{\sqrt{2}U_e}{I\sqrt{1+\tan^2\psi}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R = \frac{\sqrt{2}U_e \cos\psi}{I} = 1,4 \Omega \\ L = \frac{\sqrt{2}U_e \sin\psi}{I\omega} = 3,6 \text{ mH} \end{cases}$$

15. La puissance reçue par le moteur se décompose, grâce à la loi des nœuds et l'additivité des tensions, comme la somme des puissances reçue respectivement par la capacité, la résistance et l'inductance :

$$P = ui_g = ui_C + ui = Cu \frac{du}{dt} + Ri^2 + Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Cu^2}{2}\right) + Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2}\right).$$

On prend la valeur moyenne de ce bilan. Les puissances moyennes reçues par C et L sont nulles car le régime est T -périodique :

$$\langle \mathcal{P}_C \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{Cu^2}{2}\right) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} \left(\frac{Cu^2}{2}\right) dt = \frac{1}{T} \left[\frac{Cu^2}{2}\right]_0^T = 0$$

et de même pour $\langle \mathcal{P}_L \rangle$. On en déduit qu'en moyenne toute la puissance reçue est dissipée dans la résistance par effet Joule : $\mathcal{P}_m = \langle Ri^2 \rangle = \mathcal{P}_R$.

16. Comme $\langle \cos^2(\omega t \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$, on a

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} RI^2 = \frac{RI_0^2/2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}$$

en réutilisant l'expression de I . Cette puissance est maximale quand I l'est, donc à la résonance en $\omega = \omega_r = \omega \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. On alors

$$\mathcal{P}_{m_{\max}} = \frac{RI_0^2/2}{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}} \approx \frac{RI_0^2 Q^2}{2}.$$

17. On obtient $\mathcal{P}_{m_{\max}} = 0,67$ kW, et dans les conditions d'utilisation du moteur :

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} RI^2 = 0,34 \text{ kW}.$$

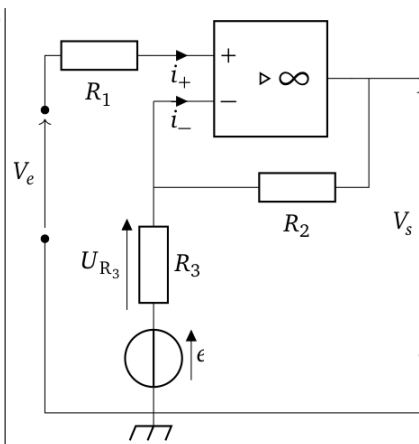
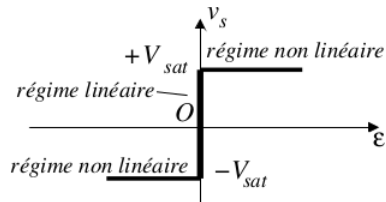
IV Capteur de forces piézoélectrique

(d'après TSI 2020)

IV.1 Mesure de l'intensité d'une force s'exerçant sur une lame piézoélectrique

- On note $\varepsilon = v_+ - v_-$ la tension différentielle d'entrée. L'ALI idéal est caractérisé par la caractéristique entrée ε - sortie V_s ci-dessous (avec $V_{sat} \approx 15$ V), et en particulier :

- des **résistances d'entrée infinies** donc des courants d'entrée nuls, $i_+ = i_- = 0$;
- $\varepsilon = v_+ - v_- = 0$ et un **gain infini** en régime linéaire ;
- une **résistance de sortie nulle**.



Ci-dessus on assimile la terre à la masse, de potentiel supposé nul. Comme $i_- = 0$, la Loi des Nœuds en Terme de Potentiel (LNTP) s'écrit ¹

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_- - e_1}{R_3} = \frac{v_- - V_s}{R_2} \Leftrightarrow v_- (1/R_2 + 1/R_3) = V_s/R_2 + e_1/R_3 \\ \text{de plus } V_e = v_+ \text{ car } i_+ = 0 \\ \text{et } v_+ = v_- \text{ en régime linéaire, d'où} \end{array} \right.$$

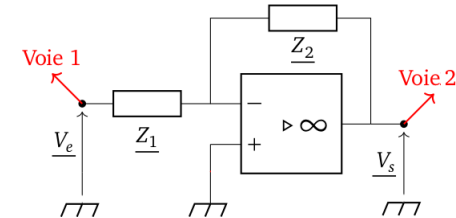
$$V_e = \frac{V_s/R_2 + e_1/R_3}{(1/R_2 + 1/R_3)} = \frac{R_2 e_1 + R_3 V_s}{R_2 + R_3}$$

- On obtient $V_e = 0,95$ V et $F = \frac{C}{K} V_e = 0,76$ F.

1. On peut aussi écrire un pont diviseur de tension : $U_{R_3} = v_- - e_1 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} (V_s - e_1)$.

IV.2 Mesure de la fréquence d'une force excitatrice sinusoïdale s'exerçant sur une lame

- On se place en Régime Sinusoidal Forcé (RSF) et on introduit les impédances complexes associées.



De nouveau le régime linéaire et la LNTP permettent d'écrire

$$0 = v_+ = v_- = \frac{V_e/Z_1 + V_s/Z_2}{1/Z_1 + 1/Z_2} \Rightarrow \underline{H} = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{Z_2}{Z_1} \text{ d'où}$$

$$\underline{H} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2\right) \cdot \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)} = -\frac{A}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right)} \text{ avec}$$

$$A = \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right)^{-1}, \omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \text{ et } \omega_2 = \frac{1}{R_1 C_1 + R_2 C_2}$$

- Il s'agit d'un **filtre élémentaire** (car sous forme de fraction rationnelle un seul monôme figure au numérateur de \underline{H}) **d'ordre 2**, tel que

$$\underline{H} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \text{ et } \underline{H} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

donc c'est un **passes-bande**.

- Le gain s'écrit

$$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{A}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right)^2}}$$

Il est maximal lorsque l'argument du radical est minimal, donc lorsque

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2}}$$

- On observe les tensions V_e et V_s respectivement sur la voie 1 et 2 d'un oscilloscope, branché comme indiqué sur le schéma ci-dessus. La masse de l'oscilloscope doit être reliée à celle de l'ALI.

Les signaux sont en opposition de phase si **leur déphasage vaut $\pi [2\pi]$** , donc **les maxima de l'un sont concomitants avec les minima de l'autre**, ou plus précis **les zéros montant de l'un sont concomitants avec les zéros descendant de l'autre**.

Remarque : Pour une détermination plus précise de la pulsation de résonance, on peut passer en mode XY pour obtenir une ellipse parfaitement aplatie sous la forme d'un segment oblique de pente négative.

7. Le déphasage entre V_s et V_e vérifie

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \pi - \arg\left(1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right)\right) = \pi + 0 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$

donc les signaux sont en opposition de phase à la résonance. La fréquence vérifie alors

$$f = \frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2}\right) \cdot \frac{1}{R_1C_1 + R_2C_2}} = \underline{0,32 \text{ kHz}}.$$