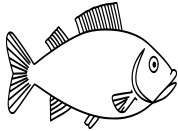
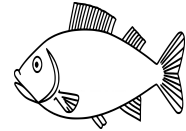


MÉCANIQUE ET THERMODYNAMIQUE

Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et *mis en valeur*. Les résultats doivent d'abord être écrits sous forme littérale et doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraisemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.



CALCULATRICES AUTORISÉES



I. Écroulement d'un château de cartes

On s'intéresse à l'écroulement d'un château de cartes. Pour cela, on étudie la chute de deux cartes en appui l'une contre l'autre, comme illustré sur l'image de la figure 1a) : les bases des cartes sont espacées d'une distance égale à la longueur $L = 9,5$ cm des cartes. Le tout forme initialement un triangle équilatéral. Le système étant peu stable, les cartes ne restent pas dans cet état, et se mettent (à $t = 0$) à glisser l'une contre l'autre. En revanche, les bases des cartes en appui sur la table ne sont pas censées glisser, mais sont le siège d'une rotation sans résistance, liaison modélisée par un pivot parfait. On note $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ la norme du champ de pesanteur.

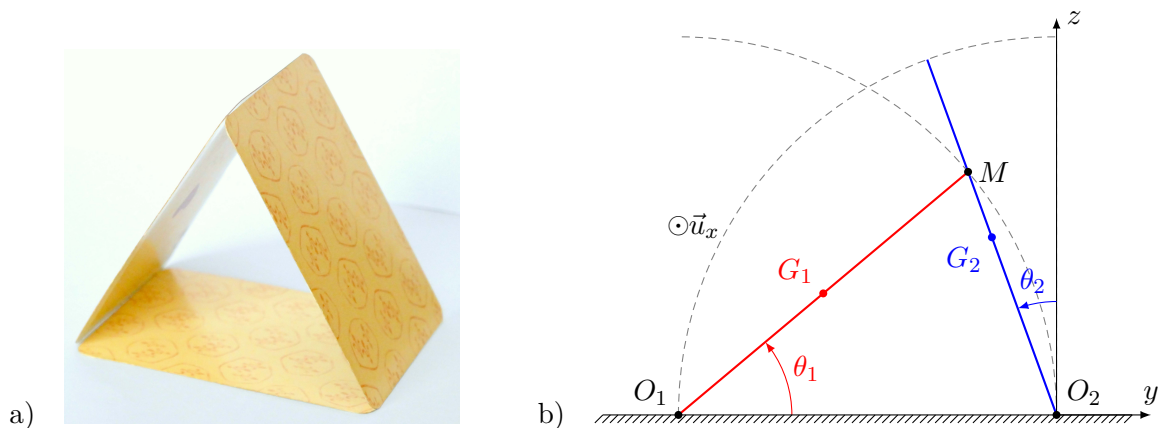


FIGURE 1 – Présentation et schématisation du dispositif étudié. a) Photographie du dispositif étudié dans son état initial, instable; b) Schéma du dispositif lors de sa chute.

On néglige tout frottement de l'air sur les cartes, mais on tient compte des frottements solides entre les cartes et le support, et entre elles. On schématise le dispositif sur la figure 1b). On suppose la masse $m = 1,9$ g des cartes uniformément répartie sur leur surface.

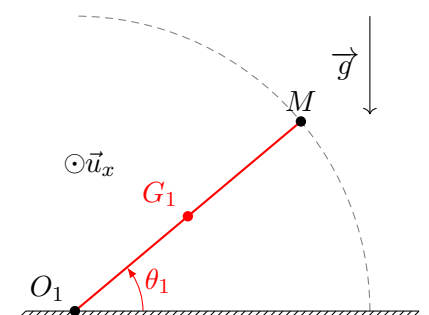
On appelle **carte 1**, la carte de gauche, en rotation autour de l'axe (O_{1x}) , et **carte 2**, la carte de droite, en rotation autour de l'axe (O_{2x}) . La distance O_1O_2 vaut donc L . On note respectivement G_1 et G_2 les centres de masse des cartes 1 et 2, situés chacun au milieu de la carte.

Chute d'une carte seule

Pour commencer, on se propose d'étudier la chute d'une seule carte, qui ne s'appuie donc sur aucune autre carte. Elle s'appuie uniquement sur la table. On note f le coefficient de frottement entre la carte et la table, et

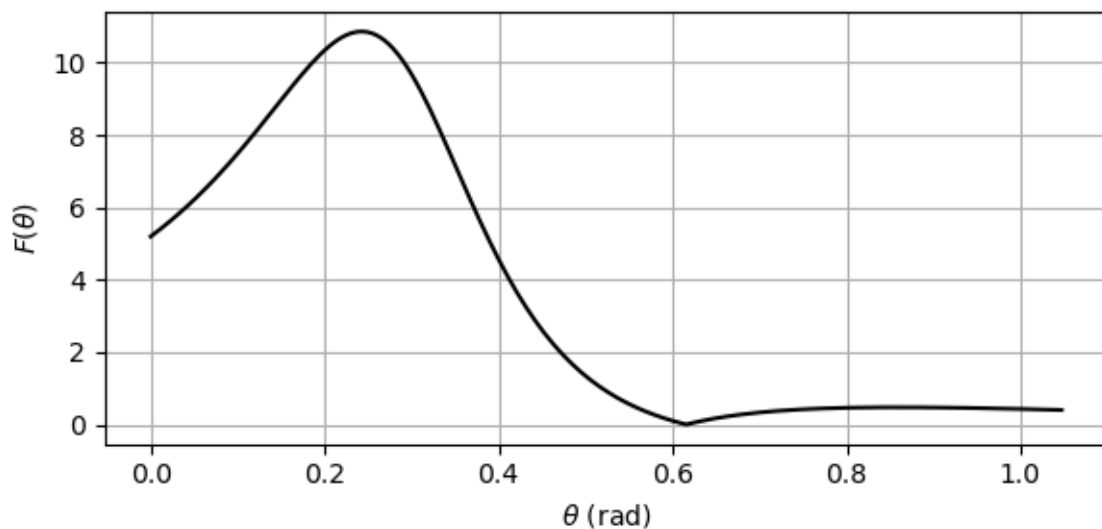
$$J = \frac{1}{3}mL^2$$

son moment d'inertie par rapport à l'axe (O_{1x}) . À l'instant initial, la carte est statique.



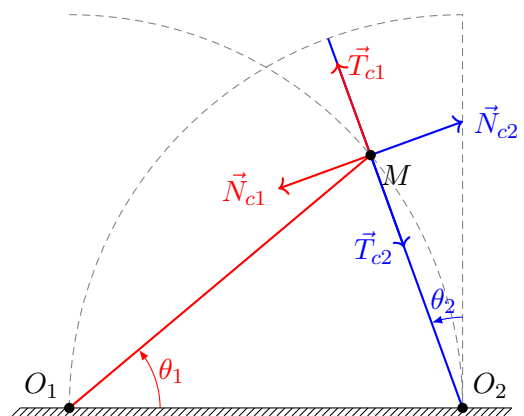
1. En appliquant le Théorème du Moment Cinétique scalaire, établir l'équation du mouvement vérifiée par θ_1 .
2. Intégrer une fois cette équation pour trouver une relation entre $\dot{\theta}_1$ et θ_1 .
Indication : on pourra alternativement trouver cette équation par le théorème de l'énergie cinétique.
3. En déduire, par le Théorème de la Résultante Cinétique, l'expression des réactions normale $\vec{N}_1 = N_1 \vec{u}_z$ et tangentielle $\vec{T}_1 = T_1 \vec{u}_y$ de la table en fonction de θ_1 . On pourra introduire une base polaire si besoin.
4. Montrer que N_1 ne peut s'annuler pendant la chute de la carte. Qu'en est-il de T_1 ? Interpréter.
5. Montrer que $\frac{|T_1|}{N_1} = F(\theta_1)$ où $F(\theta_1)$ est une fonction de θ_1 qu'on explicitera.

On représente ci-dessous le graphe de $F(\theta_1)$ entre les positions initiale et finale. À quelle condition sur le coefficient de frottement la carte va-t-elle terminer sa chute sans glisser au niveau de son pivot ? Est-ce vraisemblable ?



Prise en compte des deux cartes en interaction

Cette fois, on considère le système des deux cartes en interaction (cf schéma Figure 1 b)). On suppose que les conditions de non glissement sur le support au niveau des pivots sont réunies, de telle sorte que les liaisons pivots sont fixes. Le glissement des cartes l'une contre l'autre est modélisé par un frottement solide de coefficient f_c qui vérifie aussi les lois de Coulomb. On a représenté ci-contre les réactions normale \vec{N}_{c1} et tangentielle \vec{T}_{c1} exercées par la carte 2 sur la carte 1. De même on a représenté les réactions normale \vec{N}_{c2} et tangentielle \vec{T}_{c2} exercées par la carte 1 sur la carte 2.



6. Justifier le fait que $\vec{N}_{c2} = -\vec{N}_{c1}$ et que $\vec{T}_{c2} = -\vec{T}_{c1}$.
Dorénavant on note N_c et T_c leur norme respective. Qu'implique la loi de coulomb ?
7. Montrer que $\theta_1 = 2\theta_2$.
8. Appliquer le Théorème du Moment Cinétique à la carte 1 par rapport à l'axe (O_{1x}) . En déduire une première équation différentielle entre les fonctions $N_c(t)$ et $\theta_2(t)$. Après simplification on fera apparaître une échelle de temps caractéristique τ par analyse dimensionnelle.
9. De même, appliquer le Théorème du Moment Cinétique à la carte 2 par rapport à l'axe (O_{2x}) . En déduire une seconde équation différentielle entre les fonctions $N_c(t)$ et $\theta_2(t)$.

Il est alors aisé d'éliminer N_c pour trouver une équation différentielle en θ_2 dont la résolution numérique pour $f_c = 0,2$ donne les résultats représentés sur la figure ci-dessous.



FIGURE 2 – Résultats graphiques de la simulation de la chute.

10. À quel instant t_f la carte 1 touche-t-elle le sol, et quelle est alors la vitesse de la carte 2 ?
Que dire du mouvement ultérieur de la carte 2 ?

Aspects énergétiques de la chute des deux cartes en interaction

Dans toute la suite, on étudiera le système constitué de l'ensemble des deux cartes 1 et 2. L'état initial (EI) considéré est celui où les deux cartes sont immobiles ($t = 0$), dans la configuration de la figure 1 a). L'état final (EF) considéré correspond au moment où la carte 1 touche le sol ($t = t_f$).

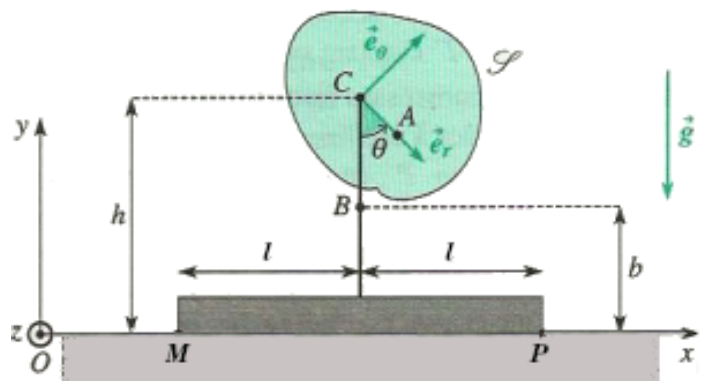
11. Pour un instant t quelconque, exprimer l'énergie cinétique E_c de l'ensemble des deux cartes.
12. Pour chaque carte, déterminer l'expression du travail de son poids entre les états (EI) et (EF).
On simplifiera en utilisant les valeurs particulières des angles initiaux.
13. En déduire, en justifiant soigneusement les étapes du raisonnement, l'expression du travail W_{int} des forces intérieures qui s'exercent sur le système formé des deux cartes, entre les états (EI) et (EF). Calculer sa valeur numérique.

II. Mouvements indésirables d'une machine mal équilibrée

On considère la machine ci-contre composée :

- d'un bâti fixe posé sur le sol horizontal fixe, de masse $m_b = 200$ kg, de largeur $MP = 2\ell = 2,0$ m et de centre de masse B situé à une hauteur $b = 0,20$ m au-dessus du sol ;
- d'un rotor \mathcal{S} tournant autour d'un axe horizontal Δ passant par C et colinéaire à (Oz) , de masse $m_r = 50$ kg et de centre de masse A situé à une distance $a = 0,50$ m de Δ .

L'axe de rotation Δ est à une hauteur $h = 1,0$ m du sol. tous les points représentés dans la figure sont dans le même plan $z = 0$ également supposé plan de symétrie de la machine.



Un couple d'origine électromagnétique exercé par le bâti sur le rotor maintient une vitesse de rotation ω uniforme de \mathcal{S} autour de Δ . On supposera $\omega > 0$ et on prendra l'origine des temps lors d'un passage en $\theta = 0$, de telle sorte que $\theta = \omega t$. On note $x(t)$ l'abscisse de l'axe central (BC)

On modélise les efforts sol \rightarrow bâti par une force $\vec{N} + \vec{T}$, où $\vec{N} = N\vec{e}_y$ est verticale et $\vec{T} = T\vec{e}_x$ est horizontale. L'état de surface au contact sol-bâti est décrit par un coefficient de frottement $f = 0,50$.

Le référentiel \mathcal{R} symbolisé par le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen. On désigne par $g = 9,8 \text{ m.s}^{-1}$ la norme du champ de pesanteur. Pour simplifier les calculs on introduira la masse totale $m = m_b + m_r$ ainsi que le facteur $\alpha = \frac{m_r}{m_b + m_r} = \frac{m_r}{m}$.

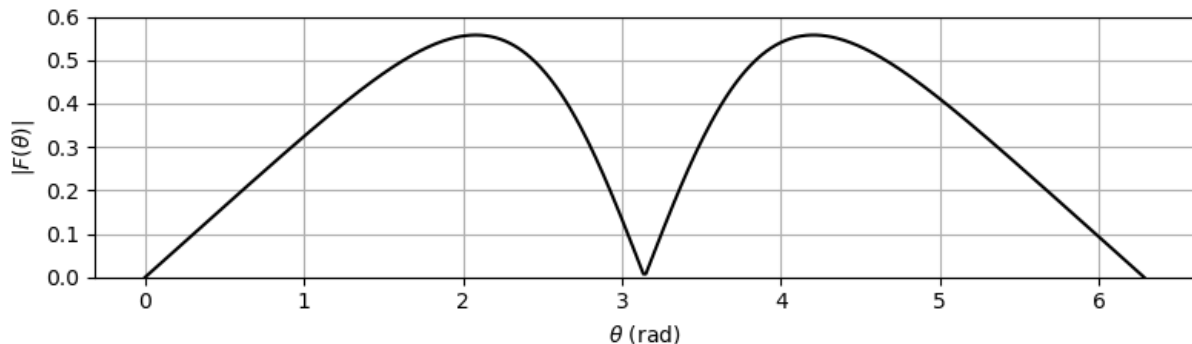
- Établir les coordonnées (x_G, y_G) du centre de masse G de l'ensemble de la machine en fonction du temps et des paramètres nécessaires (on supposera sa cote positionnée en $z = 0$).
- En appliquant le théorème de la résultante cinétique, établir les expressions de T et N en fonction de $\ddot{x}(t)$, de t et des paramètres nécessaires.
- Montrer qu'une vitesse de rotation trop élevée peut provoquer une rupture du contact entre le sol et le bâti. Établir l'expression de la vitesse ω_1 à partir de laquelle apparaît ce phénomène, puis calculer sa valeur numérique en tours par minute (tr.min^{-1}).
On supposera dorénavant que $\omega < \omega_1$.
- Montrer que le bâti ne se mettra jamais à glisser sur le sol si et seulement si

$$\forall \theta, |F(\theta)| \leq f_s \quad \text{avec} \quad F(\theta) = \frac{\sin \theta}{p + \cos \theta}$$

où p est une constante strictement supérieure à 1 dont on donnera l'expression.

D'après ce résultat, est-il préférable de faire tourner la machine rapidement ou lentement pour éviter le glissement ? Pourquoi ?

- On choisit alors $\omega = 66 \text{ tr.min}^{-1}$. Le graphe de la fonction $|F(\theta)|$ est donné ci-dessous sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Montrer que le glissement du bâti intervient à un angle θ_g que l'on déterminera, et donner la valeur de l'instant t_g auquel cela correspond.



- Quel est le sens de la vitesse de glissement au voisinage de t_g ? En déduire l'expression de $\vec{T}(t)$ tant que le glissement se maintient dans ce sens.
- En déduire l'expression de la vitesse $\dot{x}(t)$ pendant cette phase de glissement.
- Observe que le bâti s'arrête lorsque $\theta = \theta_s \approx 2,85 \text{ rad}$. Calculer la distance parcourue pendant cette phase de glissement.
- Décrire qualitativement le mouvement ultérieur du bâti après ce premier arrêt, en justifiant.
- On suppose maintenant que l'on se place dans des conditions telles que $\alpha a \omega^2 \ll g$, ce qui assure qu'il n'y a pas de glissement. Montrer que malgré cela, la machine peut avoir tendance à basculer à une condition que l'on précisera. Qu'en est-il ici compte-tenu des valeurs numériques choisies ?
Indication : à l'aide du Théorème du Moment Cinétique, on pourra chercher à localiser le point d'application R de la résultante $\vec{N} + \vec{T}$ en notant sa position $(x(t) + u(t), y = 0, z = 0)$.

III. Plongée sous-marine *Les différentes parties sont indépendantes.*

III.1. Plongée en apnée

L'eau où le plongeur évolue est considérée comme un liquide homogène et incompressible, de masse volumique $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, en équilibre dans le champ de pesanteur \vec{g} uniforme avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. La surface libre de l'eau (de cote $z=0$) est en contact avec l'atmosphère, de pression constante $P_{\text{atm}} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$. On prendra l'axe Oz vertical ascendant.

On considère un plongeur de masse $m = 75 \text{ kg}$, de capacité pulmonaire maximale $V_p = 5,0 \text{ L}$, et on désigne par $V_r = 0,074 \text{ m}^3$ le volume restant de son corps. On assimile l'air contenu dans les poumons du plongeur à un gaz parfait et on note la constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}\text{mol}^{-1}$. On suppose dans cette partie que la température de l'air atmosphérique et celle de l'eau sont égales, constantes et indépendantes de la cote z .

1. Rappeler l'équation locale de la statique des fluides et en déduire l'expression de la pression $P(z)$ dans l'eau en un point de cote $z \leq 0$. Tracer l'allure de $P(z)$ pour $z > 0$ et $z < 0$, en vous limitant à une échelle de l'ordre d'une dizaine de mètres de part et d'autre de la surface.
2. Sous l'eau, l'air inspiré a une pression $P(z)$ identique à celle de l'eau à la cote z du plongeur. Calculer la capacité pulmonaire $V(z)$ du plongeur à une cote z sachant que celui-ci, avant de plonger, a gonflé ses poumons à leur maximum puis bloqué sa respiration. Quelle est la valeur de $V(z)$ à $z = -25 \text{ m}$?
3. On définit le poids apparent du plongeur \vec{P}_{app} comme la résultante des forces s'exerçant sur le plongeur (on néglige tout frottement). On définit la flottabilité F par $\vec{P}_{\text{app}} = F\vec{u}_z$. Exprimer F puis indiquer comment varie la flottabilité lorsque la profondeur augmente.

Afin de faciliter leur descente lors des premiers mètres, les plongeurs utilisent souvent un lest, plaque de plomb de volume négligeable, accroché à une ceinture et facilement largable. Ce lest ne doit pas être trop lourd car un sur-lestage peut inciter à descendre à une profondeur excessive.

4. Quelle masse m_ℓ de lest le plongeur doit-il choisir si l'on adopte comme règle de sécurité qu'il doit avoir une flottabilité nulle à 5 mètres de profondeur ?

III.2. Plongée avec bouteille : utilité du détendeur

La pression dans une bouteille de plongée peut varier de 100 à 200 bar en début de plongée jusqu'à 3 à 5 bar en fin de plongée : la réserve de sécurité est caractérisée par la pression de seuil P_s . Le gaz contenu dans les bouteilles de plongée sera aussi considéré comme un gaz parfait.

Il faut ramener la pression de l'air sortant de la bouteille à la pression ambiante, pression de l'air respiré par le plongeur. Le détendeur assure cette fonction. Ce dispositif, inséré entre la bouteille d'air et la bouche du plongeur, fournit de l'air à la demande de ce dernier. Le détendeur possède ainsi plusieurs fonctions :

- il réduit la pression de l'air issu de la bouteille à la pression $P(z)$ de l'endroit où se trouve le plongeur ;
- il fournit la quantité d'air nécessaire à la respiration du plongeur à la pression $P(z)$;
- il se bloque lorsque la pression P_b de l'air dans la bouteille devient de l'ordre de la pression seuil P_s . Le plongeur est alors averti qu'il doit passer sur la réserve et remonter.

Au début de la plongée, la bouteille, de volume V_b , est remplie d'air à la température T_a de l'atmosphère, sous une pression P_i . En profondeur ou en surface, la bouteille et son contenu prennent instantanément la température T_e , constante, de l'eau environnante.

La respiration du plongeur est supposée périodique, de fréquence f . Sous la pression locale $P(z)$ et à la température T_e , le volume pulmonaire moyen de chaque inspiration est noté Ω .

Données : $P_i = 220 \text{ bar}$, $P_s = 4,5 \text{ bar}$, $V_b = 13 \text{ L}$, $T_a = 298 \text{ K}$ et $T_e = 288 \text{ K}$, $z = -25 \text{ m}$, $\Omega_0 = 1,2 \text{ L}$, $f = 0,18 \text{ s}^{-1}$.

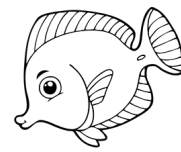
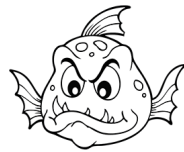
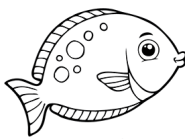
5. Calculer la quantité de matière d'air contenue dans la bouteille, d'une part au début de la plongée (n_i), d'autre part au moment où le détendeur se bloque (n_s).
6. Calculer le temps $\Delta t_s(z)$ au bout duquel le détendeur se bloque, en supposant négligeable la phase de descente du plongeur.
7. Comparer $\Delta t_s(z)$ au temps $\Delta t_s(0)$ mis par le détendeur pour se bloquer si le plongeur reste en surface dans une eau à température ambiante $T = T_a$. Faire l'application numérique.

III.3. Plongée avec bouteilles : hyperoxie et ivresse des profondeurs

DÉFINITION : Soit un mélange de plusieurs gaz parfaits (n_1 moles de gaz (1), n_2 moles de gaz (2), ...) occupant un volume V à une température T . On appelle pression partielle d'un des gaz constituant ce mélange la pression de ce gaz s'il occupait seul le même volume V à la température T .

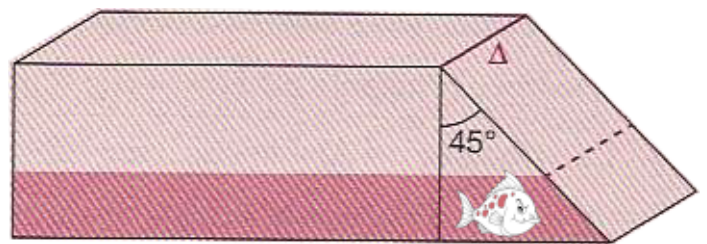
L'air contenu dans les bouteilles de plongée est assimilée à un mélange de dioxygène et de diazote, dont la composition (molaire) est $x_{O_2} = 20\%$ et $x_{N_2} = 80\%$.

8. Exprimer la pression P_i du gaz (i) en fonction de la pression totale P et de la fraction molaire $x_i = \frac{n_i}{n_1+n_2}$.
9.
 - a) Le dioxygène inhalé devient toxique si sa pression partielle augmente trop (hyperoxie), à cause des radicaux libres pouvant altérer nos cellules. Il existe même un risque d'œdème pulmonaire quand la pression partielle atteint 1,5 bar. En déduire la profondeur maximale pouvant être atteinte sans danger par le plongeur.
 - b) Lorsque la pression partielle de l'azote atteint 4,0 bar, la plongeur est victime de « l'ivresse des profondeurs », ou narcose à l'azote, entraînant des troubles du comportement tels qu'euphorie, angoisse, troubles de la vision, disparition de la notion de durée, amnésie, etc.... : En déduire la nouvelle profondeur maximale.

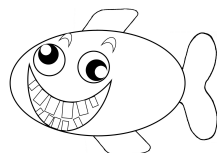


IV. Déclenchement d'un clapet

Une conduite de section carrée (côté a) est fermée par un clapet rectangulaire qui au repos est incliné à 45° par rapport à l'horizontale. Le clapet, homogène et de masse m , est en pivot parfait autour de l'axe Δ (figure ci-contre). La conduite est occupée par de l'eau de masse volumique ρ sur une hauteur h . La surface de l'eau est à la pression P_0 , de même que l'extérieur du clapet.



1. Pour quelle hauteur d'eau le moment des forces de pression sur le clapet est-il le plus important ? On se placera dans cette situation.
2. Quelle est l'expression de la pression $P(z)$ dans l'eau (on prendra un axe Oz ascendant avec l'origine sur la surface libre de l'eau).
3. Calculer le moment maximal des forces de pression par rapport à Δ .
4. À quelle condition le clapet se soulève-t-il avant que la canalisation ne soit entièrement remplie ?



* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *