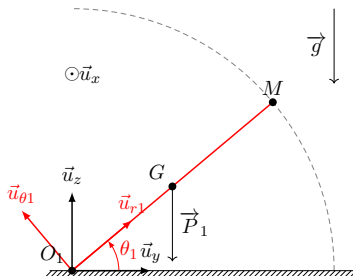


MÉCANIQUE ET THERMODYNAMIQUE

I. Écroulement d'un château de cartes

1. On applique à la carte 1 le Théorème du Moment Cinétique (TMC= scalaire par rapport à l'axe fixe (O_1x) , dans le référentiel terrestre considéré galiléen. Les actions extérieures se limitent à celles de la liaison pivot, de moment nul par rapport à l'axe, et la pesanteur, de point d'application G_1 , d'où

$$J\ddot{\theta}_1 = -mg\frac{L}{2}\cos\theta_1 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta}_1 + \frac{3g}{2L}\cos\theta_1 = 0}$$



2. On multiplie cette équation par $\dot{\theta}_1$ pour pouvoir identifier des dérivées¹ et on intègre en tenant compte des conditions initiales :

$$\forall t, \dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1 = -\frac{3g}{2L}\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \Rightarrow \forall t, \boxed{\frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2(t) = \frac{3g}{2L}(\sin\theta_1(0) - \sin\theta_1(t))}$$

3. Le Théorème de la Résultante Cinétique appliqué à la carte dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit comme suit, compte tenu du fait que le point G_1 a un mouvement circulaire de rayon $L/2$ (base polaire définie ci-dessus) :

$$m\frac{L}{2}(-\dot{\theta}_1^2\vec{u}_{r1} + \ddot{\theta}_1\vec{u}_{\theta1}) = T_1\vec{u}_y + N_1\vec{u}_z - mg\vec{u}_z \Rightarrow \begin{cases} N_1 = mg + m\frac{L}{2}(-\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1 + \ddot{\theta}_1\cos\theta_1) \\ T_1 = -m\frac{L}{2}(\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1 + \ddot{\theta}_1\sin\theta_1) \end{cases}$$

En réinjectant les relations obtenues en 1. et 2., on obtient après simplification ($\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 = 1$ et $\sin\theta_1(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$) :

$$\boxed{\frac{N_1}{mg} = \frac{1}{4}(1 - 3\sqrt{3}\sin\theta_1 + 9\sin^2\theta_1)} \text{ et } \boxed{\frac{T_1}{mg} = \frac{3}{4}(3\sin\theta_1 - \sqrt{3})\cos\theta_1}$$

4. Posons $X = \sin\theta_1$, on a donc $\frac{4N_1}{mg} = 1 - 3\sqrt{3}X + 9X^2$ qui est un trinôme du second degré de discriminant négatif donc strictement positif. **La normale ne s'annule pas au cours de la chute.** Par contre la réaction tangentielle change de signe et devient négative lorsque $\theta_1 < \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 35^\circ$. Elle retient alors

la carte qui est entraînée avec G_1 vers $+\vec{u}_y$.
Les rapport des deux expressions ci-dessus conduit à

$$\frac{|T_1|}{N_1} = F(\theta_1) \quad \text{avec} \quad \boxed{F(\theta_1) = \frac{3|3\sin\theta_1 - \sqrt{3}|\cos\theta_1}{1 - 3\sqrt{3}\sin\theta_1 + 9\sin^2\theta_1}}$$

5. La carte ne glisse pas à la condition $\forall\theta, F(\theta_1) < f$, ce qui requiert donc $\boxed{f > \max(F)} \approx 11$. Le coefficient f correspond à $\tan(\alpha)$ avec α l'angle d'inclinaison limite de la table tel que la carte posée se mette à glisser. Cela correspond à $\alpha = \arctan(f) \approx 85^\circ$ ce qui est quasi vertical. La surface doit donc être extrêmement adhérente. Au contraire **la carte risque donc de terminer sa chute en glissant vers l'avant.**

1. On trouverait la même équation en invoquant la conservation de l'énergie mécanique pour ce système conservatif, car comme il s'agit d'un SRAF, le TMC scalaire est équivalent au TPC.

6. D'après le principe des actions réciproques : $\vec{R}_{N1} + \vec{R}_{T1} = -(\vec{R}_{N2} + \vec{R}_{T2})$. Comme les réactions tangentielle et normale sont orthogonales, on trouve que $\vec{R}_{N2} = -\vec{R}_{N1}$ et que $\vec{R}_{T2} = -\vec{R}_{T1}$. En situation de glissement on aura $\boxed{T_c = f_c N_c}$.

7. Le triangle O_1O_2M étant isocèle en M , l'angle $(\vec{O_2M}; \vec{O_2O_1}) = \frac{\pi}{2} - \theta_2$ vérifie

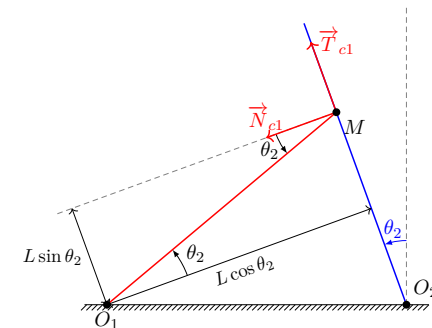
$$\pi = \theta_1 + 2(\vec{O_2M}; \vec{O_2O_1}) = \theta_1 + 2(\frac{\pi}{2} - \theta_2) = \pi + \theta_1 - 2\theta_2 \Leftrightarrow \boxed{\theta_1 = 2\theta_2}$$

8. Par rapport à l'équation établie en 1., on doit ajouter les moments des forces \vec{N}_{c1} et \vec{T}_{c1} par rapport à (O_1x) , dont les bras de levier sont indiqués sur la figure ci-contre, et en notant que $\theta_1 = 2\theta_2$ et $T_c = f_c N_c$:

$$2J\ddot{\theta}_2 = -mg\frac{L}{2}\cos(2\theta_2) + N_cL(\sin\theta_2 + f\cos\theta_2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau^2\ddot{\theta}_2 + \cos(2\theta_2) = \frac{4N_c}{mg}(\sin\theta_2 + f\cos\theta_2)}$$

$$\text{avec } \boxed{\tau = \sqrt{\frac{4L}{3g}}}$$



9. Le TMC scalaire par rapport à (O_2x) appliqué à la carte 2 donne de façon analogue

$$J\ddot{\theta}_2 = \mathcal{M}_{O_2x}(m\vec{g}) + \mathcal{M}_{O_2x}(\text{pivot}) + \mathcal{M}_{O_2x}(\vec{N}_{c2}) + \mathcal{M}_{O_1x}(\vec{T}_{c2}) \\ = +mg\frac{L}{2}\sin\theta_2 + 0 - N_c2L\sin\theta_2 + 0$$

D'où l'équation

$$\boxed{\tau^2\ddot{\theta}_2 - 2\sin\theta_2 = -\frac{8N_c}{mg}\sin\theta_2}$$

10. On lit sur le graphe de gauche que la carte 1 touche le sol quand $\theta_1 = 0 \Leftrightarrow \theta_2 = 0$ à l'instant

$$\boxed{t_f = 2,60 \times \sqrt{\frac{L}{g}} = 0,26 \text{ s.}}$$

La carte 2 est alors **verticale** et sa vitesse angulaire

$$\boxed{\dot{\theta}_{2f} = -0,54\sqrt{\frac{g}{L}} = -5,5 \text{ rad.s}^{-1}}$$

Elle va donc **tomber dans le même sens que la carte 1.**

11. Chaque carte étant un solide en rotation autour d'un axe fixe, on a

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2 = \frac{5}{6}mL^2\dot{\theta}_2^2}$$

12. Entre (EI) et (EF) la carte 1 tombe de $\theta_1(t=0) = \pi/3$ à $\theta_1 = 0$. Le travail de son poids est moteur et s'évalue par la variation de cote du centre de masse :

$$\boxed{W_{p1} = mg\frac{L}{2}\sin(\theta_1(t=0)) = mgL\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Pendant ce temps la carte 2 remonte de $\theta_2(t=0) = \pi/6$ à $\theta_2 = 0$, donc le travail de son poids est

$$\boxed{W_{p2} = -mg\frac{L}{2}(1 - (\cos\theta_2(t=0))) = -mg\frac{L}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

13. Dans la mesure où les pivots sont considérés parfaits, ils n'apportent aucun travail. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble des deux cartes, dans le référentiel terrestre galiléen, entre l'état (EI) où les cartes sont immobiles et l'état (EF) (juste avant le contact avec la table) s'écrit donc :

$$\Delta E_c = \frac{5}{6}mL^2\dot{\theta}_{2f}^2 - 0 = W_{p1} + W_{p2} + W_{int} \Leftrightarrow W_{int} = \frac{5}{6}mL^2\dot{\theta}_{2f}^2 - \frac{mgL}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$\Leftrightarrow W_{int} = \frac{mgL}{2} \left(\frac{5}{3} \frac{L}{g} \dot{\theta}_{2f}^2 + 1 - \sqrt{3} \right) = -2,2 \times 10^{-4} \text{ J}.$$

Ce travail est bien résistant (négatif) puisqu'il s'agit d'une force de freinage.

II. Mouvements indésirables d'une machine mal équilibrée

1. On peut utiliser les barycentres partiels (A, m_r) et (B, m_b) :

$$\vec{OG} = \frac{m_r}{m_r + m_b} \vec{OA} + \frac{m_b}{m_r + m_b} \vec{OB} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_G(t) = x(t) + \alpha a \sin \theta \\ y_G(t) = \alpha(h - a \cos \theta) + (1 - \alpha)b \end{cases} \quad \text{avec} \quad \theta = \omega t$$

après projection.

2. On applique le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) au système de la machine globale dans le référentiel \mathcal{R} galiléen :

$$m\vec{a}_{G/\mathcal{R}} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} T/m = \ddot{x}(t) - \alpha a \omega^2 \sin(\omega t) \\ N/m = g + \alpha a \omega^2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

3. La condition de non rupture de contact est

$$N(t) > 0, \forall t \Leftrightarrow g + \alpha a \omega^2 \cos(\omega t) > 0, \forall t \Leftrightarrow \omega < \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\alpha a}}.$$

Ainsi, on observera une rupture de contact si $\omega > \omega_1 = 9,9 \text{ rad.s}^{-1} = 95 \text{ tr.min}^{-1}$.

4. On suppose le bâti de la machine immobile, donc $\ddot{x}(t) = 0$ et d'après la loi de Coulomb

$$\forall t, T \leq fN \Leftrightarrow \forall \theta, |-\alpha a \omega^2 \sin(\theta)| \leq f|g + \alpha a \omega^2 \cos(\omega t)| \Leftrightarrow \left| \frac{\sin \theta}{p + \cos \theta} \right| \leq f \quad \text{avec} \quad p = \frac{g}{\alpha a \omega^2}.$$

On a bien $p > 1$ puisque $\omega < \omega_1$ (condition de non décollement précédente).

Lorsqu'on augmente ω , p diminue donc $|F(\theta)|$ augmente et risque donc de dépasser la valeur f , ce qui provoquera le glissement. **Le non glissement sera donc obtenu en dessous d'une vitesse angulaire maximale à ne pas dépasser.**

5. On observe que la fonction F dépasse la valeur de f donc le glissement va apparaître pour la première valeur de θ telle que $F(\theta) = f$ (car θ croît). On mesure graphiquement $\theta_g \approx 1,6 \text{ rad}$, ce qui correspond à

$$\text{un instant } t_g = \frac{\theta_g}{\omega} = 0,24 \text{ s}.$$

6. Puisque $\theta \in [0, \pi]$ et que $T(\theta) = -ma\omega^2 \sin \theta$ en l'absence de glissement, on a $T(\theta_g) < 0$ et donc **le bâti glisse vers la droite** ($\dot{x}(t_g) > 0$).

La loi de Coulomb en glissement implique alors

$$\|\vec{T}\| = -T = fN \quad \text{d'où} \quad \vec{T}(t) = -fm \left(g + \alpha a \omega^2 \cos(\omega t) \right) \vec{e}_x = -\frac{fm}{\alpha a \omega^2} (p + \cos(\omega t)) \vec{e}_x.$$

Comme $p > 1$ cette force va rester strictement négative tant qu'il y aura du glissement.

7. D'après 2., on a pendant toute la phase de glissement

$$\ddot{x}(t) = T(t)/m + \alpha a \omega^2 \sin(\omega t) = -fg + \alpha a \omega^2 (\sin(\omega t) - f \cos(\omega t)).$$

Puisque $\dot{x}(t_g) = 0$, la vitesse vérifie alors

$$\dot{x}(t) = -fg(t - t_g) + \alpha a \omega (\cos(\omega t_g) - \cos(\omega t) - f \sin(\omega t) + f \sin(\omega t_g)).$$

8. En intégrant de nouveau la vitesse on obtient une distance de glissement

$$x(t_s) = -\frac{1}{2}fg(t_s - t_g)^2 + \alpha a ((\cos(\omega t_g) + f_d \sin(\omega t_g))\omega(t_s - t_g) - \sin(\omega t_s) + \sin(\omega t_g) + f(\cos(\omega t_s) - \cos(\omega t_g))) \quad \text{d'où}$$

$$x(\theta_s) = -\frac{1}{2}fg/\omega^2(\theta_s - \theta_g)^2 + \alpha a ((\cos \theta_g + f \sin \theta_g)(\theta_s - \theta_g) - \sin \theta_s + \sin \theta_g + f(\cos \theta_s - \cos \theta_g)) = 3,7 \text{ m}$$

Il s'agit d'un déplacement conséquent, il y a du danger !

9. Par la suite l'arrêt se faisant pour une valeur de θ_s compatible avec l'hypothèse $|F(\theta)| \leq f$, le bâti reste immobile. Le bâti se remet alors à glisser à la position $\theta'_g \approx 3,8 \text{ rad}$ telle que $F(\theta'_g) = f$. Ce nouveau glissement se fait alors vers la gauche car maintenant $T(\theta'_g) = -\alpha a \omega^2 \sin \theta'_g > 0$ donc \vec{T} est dirigée vers la droite. On peut donc prévoir des **oscillations de droite à gauche du bâti séparées par des phases d'arrêt**, sans pouvoir affirmer à ce stade que ce mouvement soit périodique²

10. On applique le Théorème du Moment Cinétique (TMC) scalaire par rapport à l'axe Δ . Tant que le bâti reste fixe, le moment cinétique scalaire se réduit à celui du rotor, $\sigma_r^\Delta = J^\Delta \omega$, qui est constant. Donc la somme des moments dynamiques par rapport à Δ est nulle :

$$0 = \mathcal{M}_{\text{contact sol}}^\Delta + \mathcal{M}_{\text{pesantEUR}}^\Delta = Th + Nu(t) - m_r g a \sin \theta$$

en utilisant les bras de levier (le poids du bâti n'intervient pas). D'après 2. et pour $x(t) = \text{constante}$, on connaît l'expression temporelle de T et N . Ceci conduit à

$$0 = -h m \alpha a \omega^2 \sin(\omega t) + u(t) m (g + \alpha a \omega^2 \cos(\omega t)) - a m_r g \sin(\omega t) \approx m g u(t) - a m_r g \sin(\omega t)$$

en utilisant le fait que $\alpha a \omega^2 \ll g$. Ainsi on doit avoir $u(t) \approx \alpha a \sin(\omega t)$ Or le point d'application R de la réaction du sol est nécessairement situé sous le bâti, à la limite au bord du bâti. Par conséquent **il faut nécessairement que**

$$\alpha a \leq \ell$$

pour que le bâti de bascule pas. En l'occurrence on a $\frac{\alpha a}{\ell} = 0,1 < 1$ donc **on n'observera pas de basculement.**

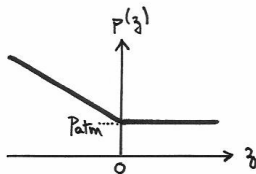
² Il semble peu probable que $x(t)$ évolue périodiquement vu la forme dissymétrique de $F(\theta)$. Il faudrait calculer le second glissement pour s'en convaincre.

III. Plongée sous-marine

III.1. Plongée en apnée

1.

Pour un axe ascendant, l'équation de la statique s'écrit $dP = -\rho g dz$ d'où $P(z) = P_{atm} - \rho g z$ pour $z < 0$ et $P(z) = P_{atm} \approx \text{constante}$ pour $z \geq 0$.



2. Soit n le nombre de moles d'air inspiré au départ, qui reste constant comme la température :

$$nRT = P_{atm}V_p = P(z)V(z) \Rightarrow V(z) = \frac{P_{atm}}{P_{atm} - \rho g z} V_p.$$

On obtient $V(z = -25 \text{ m}) = 1,5 \text{ L}$.

3. La flottabilité est la somme algébrique du poids et de la poussée d'Archimède : $F = -mg + \rho g(V_r + V(z))$. Elle diminue lorsque la profondeur augmente car la pression augmente donc le volume d'eau déplacé diminue, et donc la force d'Archimède diminue.

4. On remplace m par $m + m_\ell$ dans l'expression ci-dessus, et on pose que $F = 0$ à $z_\ell = -5 \text{ m}$, ce qui donne

$$m_\ell = \rho \left(V_r + \frac{V_p}{1 - \rho g z_\ell / P_{atm}} \right) - m = 2,4 \text{ kg}.$$

III.2. Plongée avec bouteille : utilité du détendeur

5. On obtient $n_i = \frac{P_i V_b}{RT_a} = 1,2 \times 10^2 \text{ mol}$ et $n_s = \frac{P_s V_b}{RT_e} = 2,4 \text{ mol}$.

6. En notant k le nombre d'inspirations total, et $n_0 = \frac{P(z)\Omega}{RT_e}$ la quantité consommée à chaque inspiration, on peut écrire $\Delta t_s(z) = \frac{k}{f}$ et $k = \frac{n_i - n_s}{n_0}$ d'où $\Delta t_s = \frac{(n_i - n_s)RT_e}{f(P_{atm} - \rho g z)\Omega} = 2,0 \times 10^3 \text{ s} \approx 33 \text{ min s}$.

7. En surface il faut changer la pression et la température : $\frac{\Delta t_s(z)}{\Delta t_s(0)} = \frac{T_e}{T_a} \frac{P_{atm}}{P_{atm} - \rho g z} = 0,33$. La durée d'utilisation est divisée par trois en profondeur par rapport à la surface.

III.3. Plongée avec bouteilles : hyperoxie et ivresse des profonds

8. On a $P_i = n_i \frac{RT}{V} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2} (n_1 + n_2) \frac{RT}{V}$ d'où $P_i = x_i P$.

9. a) Notons $P_{m1} = 1,5 \text{ bar}$ la pression en dioxygène à ne pas dépasser : $P_{m1} = x_{O_2}(P_{atm} - \rho g z_{\min})$. D'où la profondeur à ne pas dépasser : $z_{\min} = \frac{P_{atm} - P_{m1}/x_{O_2}}{\rho g} = -66 \text{ m}$.

b) Notons $P_{m2} = 4,0 \text{ bar}$ la pression en diazote à ne pas dépasser, on obtient de même :

$$z_{\min} = \frac{P_{atm} - P_{m2}/x_{N_2}}{\rho g} = -41 \text{ m}.$$

IV. Déclenchement d'un clapet

1. La pression est nécessairement supérieure dans l'eau à la pression dans l'air. Donc remplacer de l'eau par de l'air du même côté de l'axe Δ va forcément augmenter le moment résultant. Ce dernier sera donc maximal pour une hauteur d'eau maximale $h = a$.

2. On applique la loi de l'hydrostatique (fluide incompressible et homogène) $P(z) = P_0 - \rho g z$, en prenant $z = 0$ au niveau de la surface d'eau libre.

3. On introduit une base polaire pour décrire la position sur le clapet (ci-contre). La force élémentaire de pression résultante sur un élément de surface dS au voisinage du point $M(r, \theta = -\pi/4, y)$ est l'effet combiné de l'eau et de l'air :

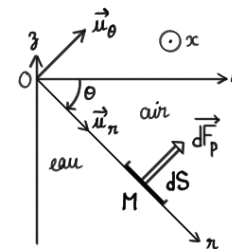
$$d\vec{F}_p = (P(z) - P_0) dS \vec{u}_\theta = -\rho g z dr dx \vec{u}_\theta$$

avec $x \in [-a/2; a/2]$, $z = r \sin \theta = -\frac{r}{\sqrt{2}}$ et $z \in [-a; 0]$.

D'où le moment résultant par rapport à $\Delta = (O_x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\Delta &= \vec{u}_x \cdot \vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{u}_x \cdot \int_{z=0}^{-a} \int_{x=-a/2}^{a/2} \vec{OM} \wedge d\vec{F}_p \\ &= \int_{z=0}^{-a} \int_{x=-a/2}^{a/2} \vec{u}_x \cdot (r\vec{u}_r + x\vec{u}_x) \wedge (-\rho g z) dr dx \vec{u}_\theta \\ &= \int_{r=0}^{a\sqrt{2}} \int_{x=-a/2}^{a/2} \frac{\rho g}{\sqrt{2}} r^2 dr dx = \frac{\rho g}{\sqrt{2}} \frac{1}{3} (a\sqrt{2})^3 a \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{M}^\Delta = \frac{2}{3} \rho g a^4$.



4. La liaison étant parfaite, le clapet s'ouvre si le moment résultant du poids est plus que compensé par celui des forces de pression :

$$\mathcal{M}^\Delta - mg \frac{a}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \rho g a^4 > mg \frac{a}{2} \Leftrightarrow m < \frac{4}{3} \rho a^3.$$