Analyse dimensionnelle

EX 1 – Dimension

1. Donner la dimension d'une énergie E, d'une puissance P, et d'une force F à partir des dimensions de base.

2. Déterminer la dimension de la charge électrique q.

3. La loi de Coulomb donne l'expression de la force d'interaction électrostatique F entre deux charges fixes q et q', distantes de r :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}$$

où ε_0 est la permittivité diélectrique du vide.
Déterminer la dimension de ε_0.

EX 2 – Détermination de dimensions par homogénéïté

1. Nous verrons dans le cours d'électrocinétique que la tension u aux bornes d'un condensateur dans un circuit R,L,C série est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

Déterminer la dimension de ω_0 et de Q.

2. L'évolution de la pression atmosphérique p en fonction de l'altitude z dans un modèle d'atmosphère à la température T_0 nous conduira à la relation :

$$p(z) = p_0\, e^{-\frac{Mg}{RT_0}(z-z_0)}$$

où M est la masse molaire de l'air, g valeur du champ de pesanteur à la surface de la Terre, R la constante des gaz parfaits.

a) Que représente la grandeur p_0 ?

b) Donner la dimension du rapport $\frac{RT_0}{Mg}$.

EX 3 – Elimination de formules non homogènes

1. Dans un exercice de mécanique, on demande aux élèves de déterminer la période T d'un pendule simple (constitué d'une masse m accrochée au bout d'un fil de longueur l, oscillant dans le champ de pesanteur terrestre g). Dans les copies, on trouve les différents résultats suivants :

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{l}}$ *b)* $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ *c)* $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{mg}}$ *d)* $T = 2\pi\sqrt{l}$

Une seule formule est correcte. Sans résoudre le problème mais simplement en utilisant des considérations sur les dimensions, éliminez les formules impossibles.

2. De même, les relations qui suivent sont issues d'un problème d'électricité. Eliminer les relations impossibles sachant que les grandeurs de type « R », « r » ou « ρ » sont des résistances, les grandeurs de type « E », « e » ou « U » sont des tensions (différences de potentiel, d.d.p.), et les gradeurs de type « I » ou « i » sont des courants (intensités). Enfin, g est une conductance, c'est-à-dire l'inverse d'un résistance.

a) $i = \frac{3ER+e}{Rr'+R^2}$ b) $e_0 = \frac{R_2^2\,[E_1-E_2+E(R_2+r_1-R_1+r_2)]}{2R_2r_1+R_2r_2+R_2^2+4R_1R_2-2R_1^2}$

c) $I = \frac{E(1-Rg)}{R(3-Rg)}$ d) $I_1 = \frac{(r+\rho+R)\,E_1+r(U_s-E)}{Rr_1+(r+\rho)(r_1+R)}$

e) $R_0 = \frac{RR\frac{1}{g}}{R+R+\frac{1}{g}}$ f) $I = \frac{[(E-U_s)r_1+E_1(r+\rho)]\,(2r+r_1)}{r+r_1+\rho+R}$

g) $$i = \frac{e+\frac{(R_2+R_4-gR_3R_4)E_1+(R_1+R_3-gR_1R_3)E_2}{R_1+R_2+R_3+R_4-gR_3(R_1+R_4)}}{r'+\frac{(R_2+R_4)\left(\frac{R_1+R_3}{gR_3}-R_1\right)}{\frac{1}{gR_3}(R_1+R_2+R_3+R_4)-(R_1+R_4)}}$$

EX 4 – Période de rotation d'un satellite

On cherche à déterminer la période de rotation T d'un satellite tournant autour de la Terre avec une trajectoire circulaire de rayon r. La période de rotation s'écrit sous la forme :

$$T = k\, G^{\alpha} r^{\beta} M_T^{\gamma}$$

où G est la constante d'attraction gravitationnelle, M_T la masse de la Terre et α, β, et γ des nombres réels. Par analyse dimensionnelle, déterminer les valeurs de α, β, et γ. Comment s'appelle cette loi ?

EX 5 – Energie d'une explosion atomique

En 1950, suite au visionnage d'un film d'explosion atomique, le physicien G. I. Taylor propose une estimation de l'énergie dégagée par cette bombe[1] sur la base d'une analyse dimensionnelle. Il considère pour cela que l'évolution temporelle du rayon du champignon $R(t)$ est déterminée essentiellement par deux paramètres physiques : l'énergie E dégagée par l'explosion, et la masse volumique de l'air ρ.

1. Retrouver explicitement la loi $R(t)$ en fonction des paramètres E et ρ.
2. Sachant qu'il estime un rayon de 70 m au bout d'une durée de 1 ms, retrouver son estimation de E. Donner son équivalent TNT, sachant qu'une kilotonne (kt) de TNT correspond à $4,184 \times 10^{12}$ J.
   La vraie valeur était inférieure d'un facteur 2...

EX 6 – Grandeurs de Planck

Dans le cadre de la mécanique, lorsqu'elle est restreinte aux phénomènes non électromagnétiques, toute grandeur a une dimension du type $M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}$. Ainsi, le kilogramme, le mètre et la seconde forment une *base d'unités*.

Dès 1901, Planck propose de considérer le triplet des constantes fondamentales $(\mathcal{G}, c, h)$ comme une *nouvelle base d'unités* (où $\mathcal{G}$ est la constante gravitationnelle, c est la vitesse de la lumière, et h est la constante de Planck). On rappelle qu'au niveau atomique, les échanges d'énergie électromagnétique par des radiations de fréquence ν se font par quanta d'énergie $E = h\nu$.

1. Retrouver la dimension des trois constantes $(\mathcal{G}, c, h)$.
2. En déduire que l'on peut construire, à l'aide de ces trois constantes, une *masse de Planck* m_P, une *longueur de Planck* l_P, et un *temps de Planck* t_P. Donner l'expression et la valeur de ces trois grandeurs de Planck.
3. On peut aussi définir une *température de Planck* T_P, à condition d'introduire aussi la *Constante de Planck* k_B. On rappelle que le produit $k_B\, T$ est homogène à une énergie.

On donne les valeurs numériques en unités SI : $G = 6,67 \times 10^{-11}$, $c = 3 \times 10^{8}$, $h = 6,62 \times 10^{-34}$ *et* $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$.

[1] L'énergie en question est une donnée a priori classée top secret...