Dynamique du point

EX 1 – Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et constant

Une particule chargée M de charge q et de masse m évolue dans un espace vide où règne un champ électrique $\vec{E} = -E.\vec{u}_x$ uniforme et constant. Elle est envoyé vers le haut et la droite depuis l'origine O avec une vitesse initiale de norme v_0 et faisant un angle α avec l'horizontale.
Déterminer les équations horaires du mouvement de la particule M. Tracer dans les différents cas possibles l'allure de sa trajectoire.

EX 2 – Frottements solides

Un bloc de métal, assimilé à un point matériel M de masse m, est lancé vers le bas à la vitesse $v_0 = 5\,\text{km.h}^{-1}$ le long d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. On fait varier θ et l'on s'aperçoit que pour un angle $\theta = \alpha$ l'objet glisse à vitesse constante le long du plan.

1. Déterminer le coefficient de frottement f. A.N. : Calculer f pour $\alpha = 15°$.

2. On lance maintenant le bloc à la vitesse $\vec{v}_0$ vers le haut. Déterminer la distance parcourue vers la droite par le bloc M (littéralement puis numériquement). Que se passe-t-il ensuite selon la valeur de θ ?

EX 3 – Chute libre avec frottements fluides

On étudie le mouvement d'un boulet de canon lancé depuis la surface de la Terre (altitude nulle), au dessus d'une fosse, avec une vitesse de norme v_0 formant un angle α avec l'horizontale. On assimile le boulet à un point matériel. Celui-ci est lancé à l'instant $t = 0$ et est soumis aux frottements de l'air, subissant alors une force $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, où λ est une constante et $\vec{v}$ la vitesse du boulet dans le référentiel terrestre.

1. Déterminer l'expression du vecteur vitesse du boulet au cours du temps.

2. Représenter l'évolution des composantes horizontales et verticales de $\vec{v}$ en fonction du temps. Décrire qualitativement l'allure de la trajectoire du boulet de canon.

3. **a)** Exprimer la portée du boulet en fonction des données du problème.

b) Déterminer la hauteur maximale atteinte par le boulet au cours du tir.

EX 4 – Masse accrochée à un ressort

On considère un système constitué d'une masse m suspendue à un ressort vertical de masse négligeable, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'extrémité supérieure du ressort est fixe, attachée en 0, origine de l'axe (Oz) descendant. La masse est repérée par sa cote z. Elle est soumise au champ de pesanteur $g\,\vec{u}_z$.

1. Exprimer la position z_e de la masse à l'équilibre, en fonction de m, g, et ℓ_0.

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par z lorsque la masse est en mouvement.

3. À l'instant $t = 0$, la masse m est dans une position telle que la longueur du ressort est égale à z_e. On lui communique alors une vitesse v_0 verticale et dirigée vers le bas.

a) Déterminer l'expression de $z(t)$ en fonction des données du problème.

b) Exprimer la période T des oscillations.

EX 5 – Mesure de masse en apesanteur

En apesanteur, les dispositifs usuels de mesure de masse ne sont pas fonctionnels suite à l'absence de gravité. Il est toutefois possible d'utiliser un système alternatif constitué d'une chaise attachée à l'extrémité d'un ressort accroché à un point fixe du vaisseau. La constante de raideur du ressort est $k = 606\,\text{N.m}^{-1}$.

1. Quand la capsule est arrimée dans sa base de lancement, la chaise vide oscille avec la période $T = 1,28\,\text{s}$. Calculer la masse m_0 de la chaise.

2. Quand la capsule est en orbite autour de la Terre, l'astronaute s'assoit sur la chaise et mesure la période $T' = 2,33\,\text{s}$. Quelle est sa masse m ?

EX 6 – Période des oscillations d'un pendule simple

On considère un point matériel M de masse m, attaché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur $l = 1\text{m}$, dont l'autre extrémité est fixée en un point O. La masse fait un angle θ avec la verticale. On lâche le pendule à l'instant $t = 0$ avec un angle θ_0, sans vitesse initiale. On néglige les frottements.

1. Peut-on résoudre analytiquement l'équation différentielle du mouvement, donnée par le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) ? Le mouvement dépend-il de la masse m ?

2. On se place dans le régime des petits angles, ce qui permet d'assimiler $\sin\theta$ à θ. Établir alors l'équation horaire du mouvement, en tenant compte des conditions initiales.

3. De quel type de mouvement s'agit-il ? Préciser la valeur de la période T_0 du mouvement. T_0 dépend-elle de θ_0 ?

EX 7 – Pendule oscillant dans du miel

Un fil inextensible de longueur $\ell = 0.50$ m, de masse négligeable, est accroché au plafond. À son autre extrémité est suspendu un mobile ponctuel de masse $m = 100$ g. Le pendule ainsi constitué oscille dans du miel, fluide qui exerce sur le mobile une force de frottement fluide linéaire en vitesse et de coeffient $\lambda = 1$ kg.s^{-1}. On lâche le pendule sans vitesse initiale avec un angle d'inclinaison par rapport à la verticale $\theta_0 = 0.2$ rad.

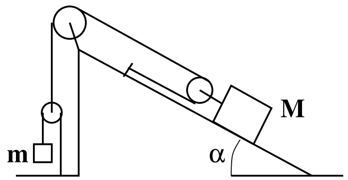
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ d'inclinaison du fil par rapport à la verticale en faisant l'hypothèse des petits angles.

2. Indiquer quel type de mouvement effectue le pendule. Calculer le facteur de qualité Q. Donner la forme de $\theta(\mathrm{t})$ et déterminer les constantes d'intégration. Préciser la valeur finale atteinte par θ.

3. Tracer l'allure du portrait de phase.

EX 8 – Mouvements avec poulies

On considère le système ci-contre, où les fils sont supposés inextensibles et sans masse, et les poulies sont supposées sans masse et sans frottements. La masse M glisse elle aussi sans frottement sur le plan incliné.



1. Quelle est la condition portant sur les masses m, M et l'angle α pour que m descende ?

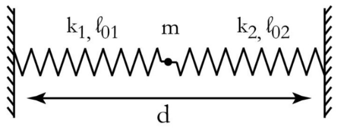
2. Cette condition étant réalisée, calculer le temps au bout duquel m atteint le sol, étant parti sans vitesse initiale d'une hauteur $h = 10\,\mathrm{m}$. On donne $m = 4\,\mathrm{kg}$, $M = 10\,\mathrm{kg}$, et $\alpha = 30°$.

EX 9 – Oscillateur masse-ressort avec frottement solide

Un mobile M de masse m est accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur k, dont l'autre extrémité est fixe. La masse est contrainte à se déplacer selon l'axe (O_x) horizontal, mais subit un frottement solide qui obéït à la loi de Coulomb. En prenant une vitesse nulle à l'instant initial, montrer que le mouvement est pseudo-périodique mais avec une enveloppe temporelle affine et non exponentielle. Quel est la perte d'amplitude à chaque oscillation complète ?

EX 10 – Association de ressorts à deux extrémités fixes

Deux ressorts linéaires horizontaux sont reliés à une masse $m = 100$ g, leur autre extrémité restant fixée sur un support vertical (cf schéma). La masse est susceptible d'osciller horizontalement, sans frottement.



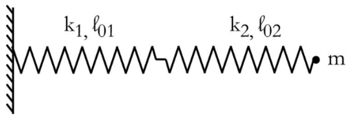
Données : $k_1 = 3$ N.m^{-1}, $\ell_{01} = 10$ cm, $k_2 = 10$ N.m^{-1}, $\ell_{02} = 20$ cm, et $d = 1$ m.

1. Rechercher la position d'équilibre de la masse.

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par son abscisse $x(t)$. Montrer que ce dispositif est équivalent à un ressort unique dont on déterminera la raideur équivalente et la longueur à vide. Indiquer la période d'oscillation de la masse m.

EX 11 – Association de ressorts à une extrémité fixe

On dispose bout à bout deux ressorts linéaires, à l'extrémité desquels on fixe une masse m (cf schéma). k_2 leurs raideurs respectives.



1. Montrer que ce dispositif est équivalent à un ressort unique dont on déterminera la raideur équivalente.

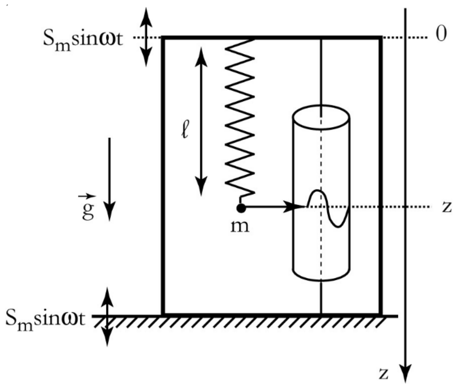
2. En déduire la période d'oscillation de la masse m.

EX 12 – Principe d'un sismographe

Un sismographe est un appareil destiné à mesurer l'amplitude S_m d'une secousse sismique, quelle que soit la pulsation de la secousse (du moins sur une plage aussi grande que possible).

Le sismographe considéré est constitué d'une masse m suspendue à l'extrémité d'un ressort sans masse, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité du ressort est accrochée à un boîtier, solidaire de la croûte terrestre. On note $\ell(t)$ la longueur du ressort (distance entre la masse et le haut du boîtier).

On considère l'axe O_z, fixe, pointant vers le centre de la Terre, de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_z}$. L'origine O de cet axe coïncide avec le sommet du boîtier du sismographe en l'absence de secousse sismique. Durant une secousse, le boîtier bougeant avec la croûte terrestre, son sommet ne se trouve plus en $z = 0$. Lorsqu'une secousse sismique est produite, elle transmet au boîtier un mouvement oscillatoire vertical $z_m(t) = S_m \sin \omega t$. La masse m est elle aussi mise en mouvement, amorti par une force de frottement visqueux $\overrightarrow{F} = -\lambda \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_z}$ où λ est une constante positive.



1. En l'absence d'onde sismique, déterminer la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre, en fonction de ℓ_0, m, g, et k.

2. Une secousse est maintenant produite.

a) Relier la position $z(t)$ de la masse à la longueur $\ell(t)$ du ressort, en fonction des paramètres du système.

b) On étudie les mouvements de la masse dans le référentiel terrestre considéré galiléen, par rapport auquel l'axe O_z reste fixe et la croûte terrestre est en mouvement éventuel. Déterminer l'équation différentielle portant sur la longueur ℓ du ressort dans le boîtier.

3. On note $L = \ell - \ell_{eq}$ où ℓ_{eq} est la longueur du ressort en l'absence d'onde sismique. La longueur L représente les variations lues sur le sismographe. Déduire des questions précédentes l'équation différentielle portant sur la longueur L.

4. On s'intéresse uniquement au régime permanent. Établir la valeur de l'amplitude L_m de L en fonction de la pulsation ω de la secousse sismique. Tracer l'allure du rapport des amplitudes $\frac{L_m}{S_m}$ en fonction de la pulsation ω de la secousse.

5. Déterminer la condition sur la fréquence propre, le coefficient de frottement et la masse de l'oscillateur pour que cet appareil soit un bon sismographe.