

Forces centrales newtoniennes

EX 1 – Comète de Halley

La période de la comète de Halley¹ est $T = 76,0$ années. La distance du périhélie de sa trajectoire au Soleil est $r_p = 0,59$ UA. UA désigne l'unité astronomique, égale au demi-grand axe de l'orbite terrestre.

1. Calculer, le demi-grand axe a (en UA) et l'excentricité de l'orbite de la comète. *Pour l'application numérique, utilisera exclusivement les caractéristiques de l'orbite terrestre : $T_T = 1$ an et $a_T = 1$ UA.*
2. Calculer les vitesses maximale et minimale de la comète, en $\text{UA}\cdot\text{an}^{-1}$. Pour information, convertir en $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ sachant que $1 \text{ UA} \approx 1,50 \cdot 10^8 \text{ km}$.

EX 2 – Orbite de transfert d'un satellite

Un satellite de la Terre est sur une orbite de rayon r_0 . En un point A on lui communique subitement une vitesse \vec{v}_A perpendiculaire au rayon vecteur \vec{r}_0 pour le faire passer sur une nouvelle trajectoire, dite *orbite de transfert*. On note M_T la masse de la Terre, et \mathcal{G} la constante de gravitation universelle.

1. Exprimer la vitesse v_c sur l'orbite circulaire en fonction des données.
2. a) Que peut-on dire du point A pour l'orbite de transfert ? En déduire les relations possibles entre le paramètre p , l'excentricité e et le rayon r_0 pour l'orbite de transfert.
b) Exprimer son excentricité en fonction de v_A et v_c (normes) dans le cas où l'orbite de transfert est une ellipse.
c) Faire de même dans le cas où la trajectoire est une hyperbole, en utilisant la relation donnant le paramètre en fonction de la constante des aires C et de la constante de force $K : p = \frac{mC^2}{K}$.
d) En déduire le type de trajectoire² dans les cas (i) $v_A = v_c$, (ii) $v_A = v_c/3$ et (iii) $v_A = 3v_c$. Calculer le demi grand-axe dans le cas elliptique.

1. L'astronome anglais Edmond Halley (1656-1742) fut le premier à découvrir que les comètes sont des objets orbitaux. En 1682, il observa une comète et remarqua que sa trajectoire coïncidait avec celles de comètes observées en 1531 et 1607. Il pensa donc qu'il s'agissait du même astre et prédit qu'elle reviendrait en 1758. Halley ne vécut pas assez longtemps pour être le témoin de l'événement, mais la comète fut au rendez-vous. Venue nous rendre visite en 1986, la comète de Halley est maintenant attendue...en 2061.

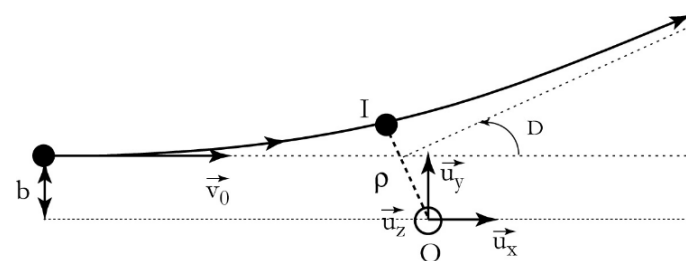
2. En toute rigueur on devrait parler d'«orbite de transfert» uniquement dans le cas des états liés, ce qui n'interdit pas a priori d'exploiter des états libres/de diffusion pour le transfert...?

EX 3 – Distance minimale d'approche : Diffusion de rutherford³

L'expérience de Rutherford⁴ consiste à observer la déviation de faisceaux de particules α , (noyaux d'Hélium, He^{2+} , constitués de 2 neutrons et de 2 protons) à travers une mince feuille d'or.

Considérons un noyau d'Hélium, de masse m_1 et de charge $q_1 = 2e$. Il subit la force de répulsion électrostatique d'un noyau d'or, quasiment immobile et centré au point O , de masse $m_2 > m_1$ et de charge $q_2 = Ze$ (avec $Z = 79$, numéro atomique de l'or).

La distance entre le support de la vitesse des particules α très loin du point O , $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$, et la droite passant par O parallèle à \vec{v}_0 est appelée *paramètre d'impact* et notée b .



1. Exprimer la force d'interaction électrostatique exercée par le noyau d'or sur la particule α . L'interaction est-elle attractive ou répulsive ? Rappeler alors la nature de sa trajectoire.
2. Montrer la conservation du moment cinétique par rapport au point O . En déduire la loi des aires et calculer la constante des aires en fonction de b et v_0 .
3. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique E_m , exprimer le rayon minimal de la trajectoire, $\rho = OI$, pour un paramètre d'impact b donné, en fonction des données du problème.
4. On considère que le noyau d'or est bombardé par un faisceau de particules α de paramètres d'impact variables. Exprimer la distance minimale d'approche $d = \min(\rho)$, en fonction de E_m et des constantes du problème. Commenter⁵.

3. En prolongement de l'approche documentaire sur la diffusion de Rutherford.

4. Il s'agit d'une expérience historique, réalisée en 1911. Au début du XX^e siècle, la représentation de l'atome adoptée était celle de J.J Thomson, considérant l'atome comme une boule d'électricité positive uniformément répartie, dans laquelle évoluaient des électrons, chargés négativement. Rutherford la réfuta grâce aux résultats expérimentaux de cette expérience.

5. Dans son article originel, Rutherford indique que pour une particule α d'énergie 9 MeV ($v_0 \sim 2.10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$), la distance minimale d'approche est alors d'environ $2,4 \cdot 10^{-14} \text{ m}$, bien inférieure aux dimensions caractéristiques d'un atome (10^{-10} m). Il en conclut alors l'existence du noyau atomique, charge centrale positive responsable de la répulsion observée.

5. Calculer l'excentricité de la trajectoire en utilisant la relation $p = \frac{mC^2}{|K|}$, puis en déduire la déviation D de la trajectoire. On commencera par retrouver la relation $\sin \frac{D}{2} = \frac{1}{e}$.

EX 4 – Chute d'une sonde sur le Soleil

Une sonde destinée à observer le Soleil est abandonnée sans vitesse (dans le référentiel héliocentrique) à la distance D du Soleil. On suppose que les conditions sont réunies pour pouvoir négliger les attractions par les autres astres. On souhaite calculer le temps de chute T_{ch} de cette sonde sur le Soleil, dont le rayon est noté R_s . La Terre, située quasiment à la même distance, décrit une trajectoire circulaire de rayon D et de période T autour du Soleil.

1. En utilisant la conservation de l'énergie, exprimer T_{ch} par une intégrale sur la distance r qui les sépare à l'instant t . Calculer cette intégrale en posant le changement de variable $r/D = \cos^2 \varphi$.
2. En assimilant la trajectoire rectiligne à une ellipse de demi petit-axe nul, et en négligeant la dimension propre des 2 astres par rapport à D , exprimer T_{ch} en fonction de T . Le résultat est-il cohérent avec la question précédente ?
3. La correction apportée par le calcul de la question 1. est-elle importante ? Pour quelle raison physique ?

Données : rayon du Soleil $R_s = 6,96 \times 10^8 \text{ m} \approx 0,0047 \text{ u.a.}$; $D = 1,49 \times 10^{11} \text{ m} = 1 \text{ u.a.}$; $T = 1 \text{ an}$.

EX 5 – Modèle de Bohr de l'atome hydrogénoïde

On considère un atome d'hydrogène, ou un ion formé d'un atome de numéro atomique Z ayant perdu tout ses électrons sauf un⁶. On étudie les trajectoires possibles de l'électron, de masse m_e , soumis à l'attraction du noyau sous la forme d'une force $\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{u}_r$.

1. Exprimer K . Établir les deux intégrales premières du mouvement. En déduire que le problème se ramène à l'étude d'un système conservatif à un degré de liberté r soumis à une énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$ qu'on exprimera en fonction de la constante des aires C .
2. Dans la suite on s'intéresse uniquement aux états d'énergie minimale de l'électron. Montrer qu'alors sa trajectoire est circulaire.

6. atome « hydrogénoïde ».

On admet que le principe de De Broglie selon lequel à toute particule peut être associée une longueur d'onde reliée à la quantité de mouvement p par la constante de Planck selon $\lambda = \frac{h}{p}$. Bohr en déduit que si l'électron occupe une orbite circulaire de rayon r , alors sa longueur d'onde doit vérifier la condition de quantification suivante⁷ : $n\lambda = 2\pi r$.

3. En déduire que le moment cinétique est quantifié et vérifie : $\sigma = n\hbar$ avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.
4. En déduire que le rayon de l'orbite est lui-même quantifié par la relation $r_n = r_1 \frac{n^2}{Z}$, où r_1 est le rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène dont on donnera l'expression et la
5. En déduire que les niveaux d'énergie de l'électron sont quantifiés selon la loi : $E_n = -R_y \frac{Z^2}{n^2}$, où R_y est la constante de Rydberg, que l'on exprimera et dont on donnera la valeur en eV.

EX 6 – Force centrale en $1/r^3$

Une particule M de masse m est soumise de la part d'un centre O à une force $\vec{F} = -\frac{k}{r^3} \vec{u}_r$, k étant une constante, $r = OM$ et $\vec{u}_r = \overrightarrow{OM}/OM$ le vecteur unitaire de la base sphériques⁸.

1. Montrer que le mouvement est plan et que $C = r^2 \dot{\theta}$ est constante.
2. a) Exprimer l'énergie potentielle E_p associée à \vec{F} , en prenant E_p nulle à l'infini.
b) Montrer que M peut être vu comme un système à un degré de liberté r soumis à une force dérivant de l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r) = -\frac{k'}{r^2}$. Exprimer k' .
c) Etudier qualitativement le type de mouvements possibles suivant le signe de k' et celui de la vitesse radiale initiale notée $\dot{r}(0) = \dot{r}_0$.
3. a) A l'aide du changement de variable de Binet, retrouver les trajectoires possibles en coordonnées polaires $r(\theta)$ en supposant connue la constante des aires C . On étudiera successivement les cas $k' = 0$, $k' < 0$ (cas "faiblement attractif" si $k > 0$) et $k' > 0$ (cas "fortement attractif").
b) Dans chacun des cas ci-dessus, considérer en particulier le cas où $\dot{r}_0 = 0$. Dans ces conditions en déduire la loi horaire $\theta(t)$, et représenter la trajectoire. Y a-t-il un cas où M rejoint le centre de force ? Si oui quel temps met-il pour le faire ?

7. Condition d'interférence constructive de l'électron sur lui-même après un tour, assimilable à une condition de quantification de mode propre.

8. Ce type de force apparaît par exemple à cause de la non-sphéricité des astres. Elle a un effet perturbateur sur le mouvement des satellites.