

## Systèmes de points

### Solide en rotation autour d'un axe fixe

#### EX 1 – Promenade en bateau

Deux personnes de 70 kg sont dans un bateau de 120 kg. Ils descendent une rivière avec une vitesse rectiligne de  $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  par rapport aux rives.

1. L'une des personnes plonge dans la rivière avec une vitesse de  $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  par rapport au rivage dans le sens opposé à celui du bateau. Quelle est la vitesse du bateau juste après la chute ?
2. Même question pour un plongeur perpendiculaire au mouvement du bateau.

#### EX 2 – Réaction du stator sur un rotor déséquilibré

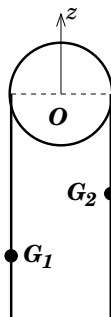
Un rotor est constitué d'un disque de rayon  $R$  de masse  $m$  et de centre  $O$ , solidaire d'un arbre de masse négligeable, en liaison pivot autour de l'axe  $O_z$ . Le disque n'est pas homogène, de telle sorte que son centre d'inertie  $I$  est excentré, à une distance  $OI = a$  de l'axe. La liaison pivot est supposée parfaite. On note  $J_z$  le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe.

1. Comment évolue la vitesse angulaire du disque  $\omega$ , de valeur initiale  $\omega_0$  ?
2. Calculer la réaction  $\vec{R}$  du stator sur le rotor. Conclure.

#### EX 3 – Course entre deux singes le long d'une corde

Deux singes de même masse  $m$ , assimilés à leur centre d'inertie  $G_1$  et  $G_2$ , sont agrippés chacun à l'un des deux pendants d'une corde, de masse négligeable, coulissant sans frottement sur une poutre. L'ensemble est initialement au repos, le singe 2 se trouvant plus haut que le singe 1. Ce dernier se met alors à monter le long de la corde, alors que le singe 2 reste immobile par rapport à elle.

1. Montrer que les deux singes gardent la même accélération par rapport au sol. Le singe 1 peut-il atteindre le sommet le premier ?
2. Montrer que le système {singes, cordes} acquiert une quantité de mouvement dirigée vers le haut. Expliquer ce sens de variation de la quantité de mouvement, alors que les forces extérieures que sont le poids des corps sont dirigées vers le bas.
3. Appliquer au système le théorème du moment cinétique en  $O$ , centre de la tige. Retrouver les résultats du 1.
4. Comment expliquer que le système acquiert de l'énergie cinétique alors que le travail des poids est résistant ?



#### EX 4 – Masses et poulie

On considère une poulie en forme de disque de rayon  $R$  fixée à un axe fixe dans le référentiel d'étude, considéré galiléen. La liaison pivot est considérée parfaite. Le câble posé sur la rainure de la poulie est inextensible, sans masse, et ne glisse pas lorsqu'elle tourne. Il relie deux masses  $m_1$  et  $m_2$  considérées ponctuelles en  $M_1$  et  $M_2$ . L'ensemble est soumis au champ de pesanteur  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ .

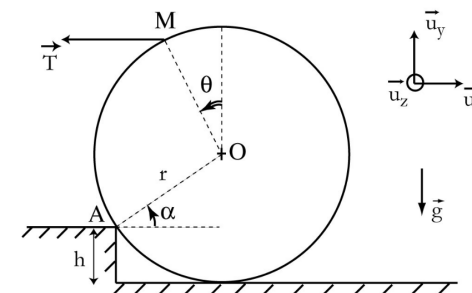
1.
  - a) Dans l'hypothèse d'une poulie sans masse, démontrer que la tension du fil appliquée à  $M_1$  est égale en norme à celle appliquée à  $M_2$ , même si les masses ne sont pas à la verticale de la poulie.
  - b) Etablir l'équation du mouvement de chaque masse dans le cas du mouvement 1D vertical.
  - c) Calculer le temps de chute de la masse la plus lourde sachant qu'elle se situe à la verticale de la poulie à l'instant initial, sans vitesse et à une hauteur  $h$  du sol.
2. On ne néglige plus la masse  $M$  de la poulie, dont le moment d'inertie par rapport à son axe de rotation vaut  $J = \frac{1}{2}MR^2$ .
  - a) Etablir de nouveau l'équation du mouvement de chaque masse par une approche dynamique.
  - b) Retrouver ces équations par une approche énergétique. Justifier.
  - c) Comment est modifié le temps de chute calculé ci-dessus ?
3. On modifie le dispositif de la façon suivante. On remplace la masse  $m_2$  par un ressort de raideur  $k$ , dont l'autre extrémité est accrochée au sol à la verticale de la poulie. On s'intéresse alors au mouvement de la masse  $m_1$  restante. Etablir l'expression de la période des oscillations de la masse.

#### EX 5 – Limite de décollement : montée d'une marche

On considère une roue de masse  $m$ , de rayon  $r$  et de centre  $O$ , appuyée en un point  $A$  contre une marche de hauteur  $h < r$ . On note  $\alpha$  l'angle  $(\vec{u}_x, \vec{AO})$ .

La roue est immobile. On attache un cordon en un point  $M$  du bord de la roue, définissant un angle  $\theta \equiv (\vec{u}_y, \vec{OM})$ . On exerce une tension  $\vec{T}$  sur le cordon selon  $-\vec{u}_x$ .

On cherche à déterminer la tension minimale  $T_{min}(\theta)$  qu'il faut exercer sur la corde pour que la roue commence à se soulever du sol, en fonction de la position du point d'attache du cordon.



1. Déterminer les forces s'exerçant sur la roue à l'équilibre.
2. Appliquer le th. du moment cinétique en un point judicieusement choisi.
3. En déduire  $T_{\min}$  en fonction de  $h$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $r$  et  $\theta$ .
4. Discuter les cas limites  $h = 0$  et  $h = r(1 + \cos \theta)$ .
5. Quelle position d'attache du cordon sur la roue permet à la personne tirant sur le cordon de fournir le moins d'effort possible ? Interpréter.

### EX 6 – Choc mou ou choc élastique

Deux masses  $m_1$  et  $m_2$  sont mobiles sur un axe  $Ox$  sans frottement (chariots à roulette, mobiles sur banc à coussin d'air...), en mouvement l'une vers l'autre avec les vitesses respectives  $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_x$  et  $\vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_x$ .

1. On suppose qu'elles subissent un *choc mou*, c'est-à-dire tel qu'elles restent ensuite solidaires l'une de l'autre.
  - a) Quelle sera alors leur vitesse commune  $\vec{v}'$  après le choc ?
  - b) Montrer que lors du choc, le travail des forces intérieures vaut

$$W_{\text{int}} = -\frac{1}{2} \mu (v_2 - v_1)^2 \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Interpréter ce résultat.

2. On suppose désormais que le choc est élastique, c'est-à-dire que l'énergie cinétique totale se conserve.
  - a) Etablir les deux équations vérifiées par les valeurs algébriques des vitesses  $v_1$  et  $v_2$  avant le choc et  $v'_1$  et  $v'_2$  après le choc.
  - b) En déduire  $v'_1$  et  $v'_2$  en fonction de  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $m_1$  et  $m_2$ .
  - c) On suppose que  $v_2 = 0$ . Interpréter le cas  $m_2 \gg m_1$ . A quelle condition est-il possible d'échanger lors du choc les vitesses des deux masses ("faire un carreau" à la pétanque...)?

### EX 7 – Pendules couplés

Deux pendules pesants de moments d'inertie  $J_1$  et  $J_2$  par rapport à leur axe sont couplés par un fil exerçant un couple de torsion  $-\alpha\theta$  pour un angle de torsion  $\theta$ . Les centres d'inertie de chaque pendule sont chacun à une distance  $a$  de l'axe. Etablir les équations différentielles vérifiées par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  que fait chaque pendule par rapport à sa position d'équilibre. En déduire l'expression des pulsations propres possibles des petites oscillations (pulsations des modes harmoniques, dits *modes propres*), dans le cas  $J_1 = J_2$ . Décrire ces modes propres.