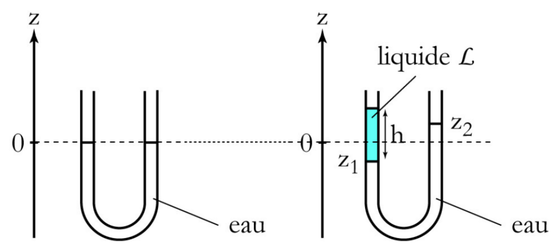
Statique des fluides

EX 1 – Densimètre

Le dispositif présenté ci-dessous permet d'effectuer la mesure de la densité d d'un liquide $\mathcal{L}$ (de masse volumique ρ_L inconnue), non miscible à l'eau.

On introduit de l'eau de volumique ρ dans un tube en U de section constante S , ouvert sur l'atmosphère, disposé verticalement dans le champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g}$.

On pose l'altitude $z = 0$ correspondant à la hauteur d'eau dans le tube. On ajoute alors un volume V du liquide $\mathcal{L}$ dans une branche du tube en U. Les cotes $z = 0$, z_1, et z_2 sont définites comme sur la figure.



1. Donner la relation entre z_1 et z_2 traduisant la conservation du volume d'eau.
2. Relier la hauteur h de la colonne de liquide $\mathcal{L}$ à la section S du tube et à V.
3. Donner l'expression de ρ_L puis de la densité d_L du liquide L en fonction de ρ, S, V et z_2.
   A.N. : On donne $\rho = 1000$ kg.m^{-3}, $S = 1$ cm^2, $V = 5$ mL, et $z_2 = 2.2$ cm. Calculer la masse volumique ρ_L puis la densité d_L du liquide L.

EX 2 – Forces sur un barrage

On cherche à exprimer la résultante des forces de pression exercées sur un barrage de forme parallélépipèdique rectangle de largeur $a = 50$ m suivant y et de profondeur $h = 60$ m (masse volumique ρ).

1. Calculer la force résultante $\overrightarrow{F}_e$ exercée par l'eau sur le barrage.
2. Déterminer alors la résultante totale $\overrightarrow{F}$ des forces de pression qui s'exercent sur toute la surface latérale du barrage. Calculer sa norme F.
3. Mêmes questions dans le cas d'un barrage ayant la forme d'un morceau de cylindre de rayon R, de hauteur H, et de secteur α.
4. Mêmes questions pour le fond d'un tube à essai de rayon R.

EX 3 – L'heure du bain

Ayant suivi le cours de statique des fluides avec un air dubitatif, un étudiant dont nous tairons ici le nom profite de sa séance de bain pour pratiquer quelques expériences de Physique. Il commence par engloutir entièrement un verre dans l'eau, laisse tout l'air s'en échapper, le met à l'envers, puis le fait lentement sortir. Le fond du verre se trouve ainsi hors de l'eau, et force est de constater qu'il est toujours bel et bien entièrement rempli d'eau !

1. Le verre est un cylindre circulaire, de rayon $R = 3$ cm et de hauteur $h_1 = 15$ cm. Quelle force (norme, direction et sens) doit-il exercer sur le verre pour maintenir le fond du verre à une hauteur $h = 12$ cm au dessus de la surface ? On négligera le poids du verre.

Il prend ensuite un cendrier, de même rayon que le verre, mais de hauteur plus petite $h_2 = 2$ cm. Il plaque l'ouverture du cendrier sur la surface de l'eau du bain, l'enfonce verticalement jusqu'à une profondeur $h' = 50$ cm, puis le remonte et vient le placer sous le verre, puis le retourne... Gloup ! Tout l'air du cendrier forme une grosse bulle qui monte et vient s'installer dans le verre en y chassant une partie de l'eau qui s'y trouvait.

1. Quel est l'état de l'air dans le cendrier à la profondeur h' ? On prendra à la surface $p_0 = 1$ bar.
2. Quelle force doit-il exercer sur le cendrier pour le maintenir ainsi à cette profondeur ?
3. Quel est ensuite l'état de l'air dans le verre ?
4. Quelle nouvelle force doit-il alors exercer sur le verre pour maintenir son fond à la hauteur $h = 12$ cm au dessus de l'eau ?

EX 4 – Atmosphère non isotherme

On suppose que l'atmosphère est un gaz parfait de masse molaire M. Le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ est considéré uniforme. On modélise le profil vertical de température de l'atmosphère par $T(z) = T_0.\left(1 + \frac{z}{z_0}\right)^{-1}$, où $z_0 = 40.0$ km et $T_0 = 300$ K. Dans les calculs, on notera $p_0 = 1.01$ bar la pression au sol et $H = \frac{RT_0}{Mg}$ la hauteur caractéristique d'une atmosphère isotherme de la température T_0.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $p(z)$, et la résoudre.
2. Calculer la pression à 1.0 km et à 5.0 km d'altitude.
3. Comparer au cas d'une atmosphère isotherme à 273 K. Commenter.

EX 5 – Corps flottants

On s'intéresse à la flottaison d'un bouchon en liège de hauteur H et de masse volumique ρ_b.

1. Le bouchon a une forme cylindrique de rayon R.

   a) Exprimer la hauteur h dont le bouchon dépasse de l'eau à l'équilibre.

   b) En déduire une condition sur ρ_b pour que celui-ci flotte.

   c) Calculer la position de son centre de gravité. L'équilibre est-il stable ?

   d) Retrouver l'expression de h en calculant directement la résultante des forces de pression que subit le bouchon.

2. Le bouchon a maintenant la forme d'un cône flottant pointe en bas, de même section maximale S.

   a) Déterminer la hauteur h dont dépasse ce bouchon. Rappel : $V_{cone} = \frac{1}{3}V_{cylindre}$.

   b) Calculer la position de son centre de gravité. L'équilibre est-il stable ? Si ce n'est pas le cas, que peut-on faire pour le rendre stable.

EX 6 – Ballon à gaz

L'enveloppe d'un ballon à gaz rempli de dihydrogène (masse molaire M) a un volume constant V (sphérique de diamètre D). Une valve y maintient une pression toujours égale à la pression extérieure. La nacelle, l'enveloppe et les deux passagers ont une masse totale m_1. Près du sol, la pression est p_0, la température T_0, et la masse volumique ρ_0.

1. Quelle masse m_2 de lest faut-il emporter pour que le ballon se maintienne en équilibre près du sol ?

2. En supposant l'atmosphère isotherme, établir la dépendance verticale $\rho(z)$ de la masse volumique.

3. Déterminer l'altitude maximale h que peut atteindre le ballon en délestant au maximum.

Données : $p_0 = 1\,\text{bar}$, $T_0 = 300\,\text{K}$, $M = 2\,\text{g.mol}^{-1}$, $M_{\text{air}} = 29\,\text{g.mol}^{-1}$, $g = 9{,}81\,\text{m.s}^{-2}$, $D = 10\,\text{m}$ et $m_1 = 447\,\text{kg}$.

EX 7 – Gel des degrés de liberté de rotation

Le théorème d'équipartition de l'énergie suppose que les degrés de liberté peuvent être traités par la mécanique classique. Or l'énergie cinétique de rotation d'une molécule est régie par la mécanique quantique. On s'intéresse à une molécule diatomique constituée de deux atomes identiques. Pour les applications numériques on pourra prendre par exemple O_2 ou N_2.

1. Evaluer le moment d'inertie J_Δ de la molécule par rapport à un axe de symétrie Δ perpendiculaire à celui de la liaison.
Que dire du moment d'inertie $J_{\Delta'}$ par rapport à l'axe de la liaison ?

2. En supposant la molécule en rotation autour de Δ considéré fixe, donner l'expression de son énerggie cinétique E_c en fonction de son moment cinétique scalaire L_Δ et de J_Δ.

3. La mécanique quantique indique la quantification de la norme du moment cinétique, selon : $L_\Delta^2 = j(j+1)\,\hbar^2$, où $j \in \mathbb{N}$ et $\hbar \approx 10^{-34}$ J.s est la constante de Planck réduite ($\hbar = h/(2\pi)$). Pour quelle température T_{gel} l'énergie d'agitation thermique est-elle du même ordre de grandeur que l'écart typique entre les niveaux d'énergie quantiques ?

4. Expliquer pourquoi pour des températures inférieures à T_{gel}, les rotations de la molécule sont "gelées". En déduire l'allure typique de la courbe de la capacité thermique massique $C_{V_m}(T)$ d'une molécule telle que O_2 ou N_2.

EX 8 – Equilibre hydrostatique en rotation

Un cylindre de rayon a est empli d'air à la pression atmosphérique p_0. Le cylindre est mis en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire constante ω. Au bout d'un certain temps, l'air qu'il contient est entraîné à cette même vitesse à cause des forces de viscosité, et le champ de pression à l'intérieur devient stationnaire. Compte-tenu de la faible hauteur du cylindre, on néglige l'effet de la pesanteur, et on admet alors que la pression de l'air emprisonné dépend uniquement de la distance à l'axe r.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $p(r)$.

2. En déduire la loi $p(r)$ de la pression de l'air en fonction de la distance r à l'axe.

3. A.N. : Calculer la pression de l'air sur la paroi du cylindre pour une vitesse de rotation de 30000 tours par minute, pour $a = 10$ cm et $T = 300$ K.