Simulation de mouvements balistiques

Objectif :

On souhaite simuler le mouvement d'un projectile de masse m, lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale, et soumis à la pesanteur et à une force de frottement fluide $\vec{F}$ soit linéaire soit quadratique en la vitesse.

En posant $\vec{v} = v_0\,\tilde{\vec{v}}$ et $t = \tau\,\tilde{t}$, on aboutit aux équations adimensionnées suivantes.

- Force linéaire $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\vec{v}}}{\mathrm{d}\tilde{t}} = -\tilde{g}\,\vec{u}_z - \tilde{\vec{v}} \quad \text{avec} \quad \tilde{g} = \frac{g\tau}{v_0} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{m}{\lambda}\,. \tag{1}$$

- Force quadratique $\vec{F} = -\beta||\vec{v}||\,\vec{v}$:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\vec{v}}}{\mathrm{d}\tilde{t}} = -\tilde{g}\vec{u}_z - \frac{1}{\tilde{g}}\,||\tilde{\vec{v}}||\,\tilde{\vec{v}} \quad \text{avec} \quad \tilde{g} = \frac{g\tau}{v_0} \quad \text{et} \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{\beta g}}\,. \tag{2}$$

1. Sur papier, formuler chacune des deux équations différentielles sous la forme d'un problème de Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}\vec{Y}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{Y})\,,$$

en explicitant le vecteur $\vec{Y}$ et la fonction vectorielle $\vec{F}$.

2. Construire deux fonctions `frottement_lineaire(Y,v0,tau)` et `frottement_quadratique(Y,v0,tau)` générant le second membre $\vec{F}(\vec{Y})$ de chacune de ces équations différentielles, sous la forme d'un vecteur (`array` de longueur 4).

3. Construire une fonction `euler(F,v0,tau,Y0,t0,tN,N)` permettant de résoudre ces équations par la méthode d'Euler, en découpant l'intervalle en N pas de temps entre les instants $t0$ et t_N, pour une fonction F à fournir. La fonction renverra les valeurs des instants t_n, des positions x_n et y_n et des vitesses $\dot{x}_n$ et $\dot{y}_n$ sous la forme de vecteurs (longueur $N+1$).

4. Écrire une fonction `tir(F,v0,tau,Y0,t0,tN,N)` qui renvoie un graphe légendé du tir avec frottement.
Tester la fonction avec $v_0 = 10\,\mathrm{m.s^{-1}}$, $\alpha = 30°$ et $\tau = 1\,s$ par exemple.

5. Écrire une fonction `comparaison(F,v0,tau,Y0,t0,tN,N)` qui renvoie un graphe légendé superposant 4 courbes de couleurs différentes représentant :

- la parabole du tir sans frottement calculée analytiquement (solution exacte) ;
- la solution numérique du tir sans frottement ;
- la solution numérique du tir avec frottement linéaire ;
- la solution numérique du tir avec frottement quadratique.

Tester la fonction avec différentes valeurs de v_0, α et τ. Adapter la résolution temporelle pour obtenir un tir sans frottement conforme à la solution analytique.

6. Écrire une fonction `portee(F,v0,tau,Y0,t0,tN,N,eps)` qui cherche par dichotomie la portée du tir, avec une précision `eps`.

7. Écrire une fonction `portee_max(F,v0,tau,Y0,t0,tN,N,eps)` qui cherche la portée maximale du tir, avec une précision `eps`.