

Mesures et incertitudes

Application aux travaux pratiques

Table des matières

I	Mesure et incertitude : approche théorique	2
1	Qu'est-ce qu'une mesure ? Définitions	2
2	Variabilité, estimation, erreurs	2
II	Estimation pratique des incertitudes	5
1	Évaluation de type A de l'incertitude-type	5
2	Évaluation de type B de l'incertitude-type	5
3	Incetitude-type élargie et niveau de confiance	7
III	Propagation des erreurs et incertitudes	7
1	Cas monodimensionnel	8
2	Cas multidimensionnel	9
IV	Présentation des résultats numériques	10
1	Chiffres significatifs	10
2	Présentation d'un résultat de mesure	11
V	Analyse graphique	12
1	Règles générales	12
2	Régressions linéaires	12
VII	Résumé pratique pour les TP	14
ANNEXE	Caractéristiques générales d'un appareil de mesure	15

Introduction

Lord Kelvin écrivait « il n'y a de science que du mesurable... ». Mesurer des grandeurs identifiées est une activité fondamentale dans les laboratoires de recherche scientifique et dans l'industrie. Toute validation théorique d'un phénomène (physique, biologique, chimique, etc.) passe par la mesure fiable de ses effets. C'est aussi fondamental dans de nombreuses activités quotidiennes¹.

Les capteurs et instruments ont pour vocation d'aider à traduire la valeur d'une grandeur en une donnée numérique, parfois très simplifiée, qui pourra être utilisée afin de tirer des conclusions ou prendre des décisions, c'est-à-dire en une donnée numérique digne de confiance. Les méthodes et conventions qui régissent la définition, l'évaluation et l'expression des résultats de mesure et les propriétés des instruments sont partie intégrante du langage à vocation universelle de la **métrologie**, science de la mesure. C'est en particulier grâce à une estimation convenable de l'incertitude attachée à un résultat que ce dernier pourra, paradoxalement, inspirer une confiance maîtrisée, et être reconnu sans équivoque par plusieurs partenaires. Comment, en effet, comparer entre eux des résultats de façon fiable, ou confronter une donnée à une tolérance, en l'absence de caractérisation de l'incertitude ?

Mesurer une grandeur, c'est donc d'une part comparer une grandeur inconnue à une grandeur prise comme référence (unité) à l'aide d'une chaîne instrumentale, et d'autre part estimer une incertitude attachée à cette mesure, afin d'en qualifier la qualité.

Dans tout ce document, on s'appuiera prioritairement sur les recommandations

1. C'est par la métrologie qu'on peut assurer que les volumes des marchandises qui font l'objet de transactions commerciales sont mesurés de façon correcte, comme le pétrole brut, le gaz naturel, l'eau, dans une vaste étendue de mesure. C'est grâce à des mesures exactes qu'on peut fabriquer de façon efficace les composants d'objets aussi variés que les lecteurs de disques numériques, des véhicules de performances élevées, pour lesquels la fiabilité dépend de tolérances de fabrication contraignantes. De même les systèmes de télécommunications ne fonctionnent avec des rythmes de transmission élevés que grâce à la coordination des échelles de temps, au travers de l'*UTC (Temps Universel Coordonné)*, l'échelle internationale construite à partir des horloges atomiques. Cette échelle est également utilisée par les systèmes de navigation à couverture globale, tel le *GPS* ou le système *Galileo*.

La pratique de la médecine fait appel à des mesures délicates, tant pour les diagnostics qu'en thérapie, qu'il s'agisse d'analyses chimiques, de mesure des doses de rayonnement, d'interprétation d'images. En agriculture, le suivi des produits alimentaires et la protection de l'environnement nécessitent des mesures, qui permettent le contrôle ou l'anticipation de dispositions réglementaires. Plus généralement, l'expertise judiciaire s'appuie sur des résultats de mesure, du simple contrôle de vitesse, de poids par essieu de camion, d'alcoolémie ou d'imprégnation de stupéfiants, aux investigations les plus poussées en matière, par exemple, de résistance des matériaux. Enfin, dans le sport la comparaison des performances effectuées en des moments, dans des lieux et avec des équipements différents, impose l'exactitude des instruments de mesure.

officielles du BIPM², tout en gardant une approche suffisamment simplifiée pour le niveau requis en CPGE.

I. Mesure et incertitude : approche théorique

I.1. Qu'est-ce qu'une mesure ? Définitions

- o La grandeur que l'on veut mesurer est appelée le **mesurande**. En toute rigueur, sont associées à la définition du mesurande l'ensemble des conditions expérimentales susceptibles d'influer sur la mesure. Plus ces conditions sont définies avec précision, plus la mesure sera susceptible d'être précise.
Exemple : « résistance R du résistor à la température de 20°C » est un mesurande différent et plus précis que « résistance R du résistor ». La prise en compte des effets de la température peut permettre de corriger la mesure, ou d'envisager une correction lors d'une mesure ultérieure.
- o On appelle **mesurage** (ou plus couramment **mesure**³) l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs numériques que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.
Exemple : Mesurage du mesurande « résistance R » à l'aide d'un ohmmètre.
- o La **valeur du mesurande**⁴ (notée M_0) est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Toutefois, **tout système physique (instruments de mesure et expérimentateurs compris) étant par essence sujet à diverses formes ou causes de variabilité, la valeur du mesurande ne peut jamais être connue avec exactitude.**
- o La variabilité associée au mesurande est quantifiée par une grandeur de nature statistique, appelée **incertitude** (notée $u(M)$). **C'est une propriété en soi du mesurande**, au même titre que sa valeur, à laquelle on accède par le mesurage⁵. Elle lui est consubstantielle et **ne peut donc jamais être totalement éliminée.**

2. Bureau International des Poids et Mesures, JCGM 100 : 2008 – Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement (en abrégé *GUM*).

3. Le terme de « mesure » est utilisé en français dans divers contextes avec des significations variables, ce qui justifie l'emploi du terme plus spécifique de « mesurage ».

4. On rencontre parfois l'appellation « valeur vraie » du mesurande, qui est considérée comme un pléonisme par le BIPM, et surtout comme une source d'incompréhension sur ce qu'est la mesure en physique.

5. La connotation négative du mot *incertitude*, associée à l'idée d'*imperfection* de notre appréhension du monde, est une source de confusion sur ce qu'est la réalité expérimentale en science. Le mot *indétermination* peut bien souvent le remplacer avantageusement.

- o Le **résultat du mesurage** (ou **résultat de mesure**, noté M) est un **intervalle de valeurs probables attribué à un mesurande** complété par toute information pertinente disponible. Cet intervalle est en général centré sur la **valeur estimée** m de la grandeur, et de demi-largeur la valeur de l'**incertitude** $u(M)$:

$$M_0 \in [m - u(M); m + u(M)].$$

Enfin on ajoute éventuellement le *niveau de confiance* associé à cette incertitude. En pratique, l'écriture du résultat⁶ du mesurage M prend la forme suivante, avec une unité appropriée identique pour m et $u(M)$:

$$M = m \pm u(M) \quad , \quad \text{unité} \quad (, \text{ niveau de confiance}).$$

- o On appelle **incertitude relative** ou **précision relative** sur le résultat du mesurage la quantité $\frac{u(M)}{m}$, souvent exprimée en %. Plus ce rapport est petit, plus le mesurage est précis.

I.2. Variabilité, estimation, erreurs

a) Variabilité (ou dispersion)

Les **conditions de répétabilité** sont remplies lorsque le même opérateur ou le même programme effectue N mesures dans les mêmes conditions. Toutefois, **il existe toujours des causes de variabilité**, même si les conditions de cette mesure sont définies avec une grande précision. **La raison profonde de cette variabilité naturelle se trouve dans les lois de la physique elle-même** : la dynamique des systèmes complexes est chaotique ce qui engendre des fluctuations non prédictibles à certaines échelles spatiales ou temporelles (agitation thermique et chaos moléculaire⁷, dynamique des fluides⁸, problème à N corps en mécanique céleste⁹, fluctuations quantiques¹⁰...). D'autre part, on peut noter que le mesurage est un processus qui fait nécessairement intervenir trois entités qui interagissent nécessairement, dans l'espace et au cours du temps :

6. On revient sur ce point plus en détail en **IV.2**.

7. Les grandeurs thermodynamiques telles que la température, la pression ou l'activité d'un soluté en solution... sont définies comme des moyennes, et n'ont de sens qu'à des échelles suffisamment grandes, mésoscopiques ou macroscopiques, lorsque les fluctuations relatives sont alors faibles.

8. Le mouvement des fluides est imprédictible à long terme en raison de la sensibilité aux conditions initiales de l'équation de Navier-Stokes, à moins de passer à une description probabiliste, ce qui distingue la climatologie de la météorologie.

9. À partir de 3 masses ponctuelles en interaction gravitationnelle newtonienne (et a fortiori relativiste), le système devient sensible aux conditions initiales, et donc imprédictible.

10. En physique quantique, l'état d'une particule matérielle ou non est décrit par une fonction d'onde qui permet de calculer une probabilité d'obtenir tel ou tel résultat de mesure.

- **le système** que l'on souhaite mesurer (délimité par une surface supposée fermée) ;
- **l'environnement extérieur** dans lequel baigne le système ;
- **l'observateur**¹¹, qui à la fin est toujours un être vivant (un humain par exemple, même s'il est assisté par un programme informatique).

Chacune de ces trois entités étant par nature elle-même complexe et sujette à fluctuations, **le mesurage est nécessairement un processus aléatoire**. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle certaines grandeurs physiques ne sont définies que de façon probabiliste (état d'un système en mécanique quantique, durée de vie d'un état excité ou d'un atome radioactif...). En outre, un mesurage prend nécessairement une **durée finie** pour être réalisé, durée au cours de laquelle chacune des entités évolue. Ainsi **l'idée même d'une connaissance exacte d'une grandeur à un instant donné est illusoire car contraire aux lois de la physique**.

b) Approche statistique

Si on effectue N mesures \mathbf{m}_i dans des conditions de répétabilité, le meilleur estimateur de la valeur du mesurande est la **moyenne arithmétique** des N mesures :

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i$$

La variable aléatoire \mathbf{m}_i est régie par une loi de probabilité $p(\mathbf{m}_i)$ qui pourrait être connue en réalisant un nombre infini de mesures. On la caractériserait dans un premier temps au minimum par son **espérance mathématique**

$$\bar{\mathbf{m}}_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{m}}$$

et son **écart-type** (ou *déviatoin standard*)

$$\sigma = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{m}_i - \bar{\mathbf{m}}_\infty)^2},$$

qui constitue une caractérisation numérique minimale de la variabilité du mesurage, c'est-à-dire de son incertitude.

11. La question de savoir si l'observateur doit être inclus dans l'environnement du système ne sera pas tranchée ici, dépassant largement le cadre de ce cours et probablement de la physique elle-même.

La moyenne $\bar{\mathbf{m}}$ est elle-même une variable aléatoire. Or on peut montrer que si les N valeurs \mathbf{m}_i sont statistiquement indépendantes, alors $\bar{\mathbf{m}}$ admet un écart-type

$$\sigma_{\bar{\mathbf{m}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Ainsi, plus le nombre de mesures est élevé, plus l'estimation par la moyenne $\bar{\mathbf{m}}$ se rapproche de l'espérance $\bar{\mathbf{m}}_\infty$ de la distribution, et ce de façon de plus en plus certaine.

Pour se représenter les choses, considérons une variable aléatoire dite *gaussienne*, que l'on rencontre fréquemment en physique et dans d'autres domaines, c'est-à-dire vérifiant la loi (ou distribution) de probabilité dite *normale* illustrée en Fig. 1 :

$$p(\mathbf{m}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\mathbf{m}_i - \bar{\mathbf{m}}_\infty)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{avec} \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{m}) d\mathbf{m} = 1).$$

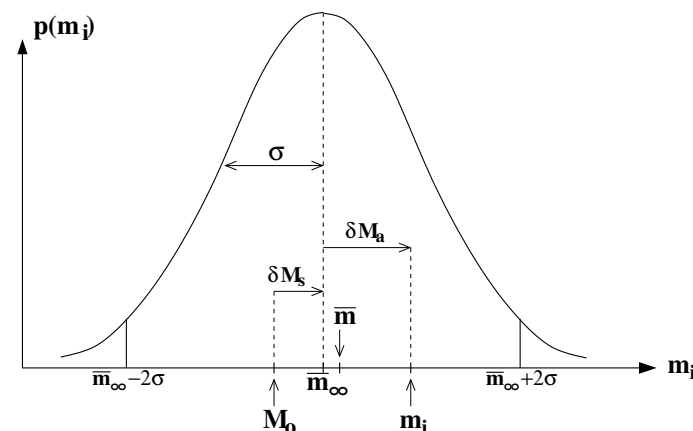


FIGURE 1 – Les mesures successives \mathbf{m}_i se distribuent suivant une loi de probabilité qui est souvent gaussienne, d'espérance $\bar{\mathbf{m}}_\infty$ et d'écart-type σ . Les valeurs de \mathbf{m}_i , $\bar{\mathbf{m}}$ et M_0 ont été placées arbitrairement.

En particulier on peut noter que la variable aléatoire que constitue la moyenne arithmétique $\bar{\mathbf{m}}$ devient gaussienne à mesure que N augmente, toujours sous la même hypothèse d'indépendance des \mathbf{m}_i et quelque soit leur distribution statistique. Il s'agit du *théorème de la limite centrale*.

c) Concepts d'erreurs aléatoires et systématiques

DÉFINITION : Lors d'un mesurage conduisant à la valeur \mathbf{m}_i , on appelle **erreur** l'écart à la valeur du mesurande :

$$\delta\mathbf{M} = \mathbf{m}_i - \mathbf{M}_0$$

ATTENTION : **Le concept d'erreur est idéal et les erreurs ne peuvent pas être connues exactement, au même titre que la valeur du mesurande \mathbf{M}_0 . Les termes d'incertitude et d'erreur représentent des concepts complètement différents et ne doivent pas être confondus.**

Même si cette erreur ne peut être connue, on souhaite en général pouvoir la savoir petite. Or la répétition des mesures nous permet de réduire la variabilité comme montré plus haut grâce au caractère aléatoire des fluctuations, mais ne nous assure pas de converger vers la valeur du mesurande :

$$\bar{m} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \bar{m}_\infty \neq \mathbf{M}_0$$

a priori. La raison de cet écart est imputable à des **effets dits systématiques** dans l'opération de mesurage, c'est-à-dire des effets qui ne fluctuent pas à chaque mesurage de sorte que l'opération de moyennage ne permet pas de les réduire. Au contraire des effets aléatoires, les effets systématiques sont déterminés par une cause invariable au cours du mesurage.

Pour distinguer les effets aléatoires des effets systématiques présents lors du mesurage, on décompose formellement l'erreur comme suit (cf Fig. 1).

$$\delta\mathbf{M} = \mathbf{m}_i - \mathbf{M}_0 = \mathbf{m}_i - \bar{\mathbf{m}}_\infty + \bar{\mathbf{m}}_\infty - \mathbf{M}_0 = \delta\mathbf{M}_a + \delta\mathbf{M}_s$$

DÉFINITIONS :

- **Erreur aléatoire** : $\delta\mathbf{M}_a = \mathbf{m}_i - \bar{\mathbf{m}}_\infty$
- **Erreur systématique (ou biais)** : $\delta\mathbf{M}_s = \bar{\mathbf{m}}_\infty - \mathbf{M}_0$

De nouveau **il s'agit de concepts idéaux, et aucune de ces deux erreurs ne peut être connue exactement**. Si l'erreur aléatoire peut être seulement estimée de façon approchée par la quantité $\mathbf{m}_i - \bar{\mathbf{m}}$, l'erreur systématique peut seulement être réduite par l'étude approfondie du protocole de mesure, des instruments utilisés et des processus mis-en-jeu lors de la mesure. Toutefois, par définition **l'erreur systématique prend la même valeur (inconnue) lors de chaque mesure**. En théorie l'erreur systématique peut donc être définitivement

réduite par l'amélioration de la connaissance de l'ensemble des éléments mis en jeu par l'expérimentateur¹². C'est pourquoi...

Avant toute opération de mesure il est impératif de s'efforcer d'éliminer les sources d'erreurs systématiques connues, par exemple via un **étalonnage** (test de la mesure sur des cas connus, comparaison à une valeur de référence).

Toutefois l'élimination des erreurs systématiques est par définition un processus qui ne peut être terminé, et qui est en général réalisé par étapes de corrections successives.

Exemples de causes d'erreurs aléatoires

- Liées à l'instrument ou à son utilisation par l'expérimentateur :
 - Lecture, ou appréciation de la dernière division sur un vernier, choix du dernier digit sur un appareil numérique.
 - Limite de résolution (largeur d'une fente de spectromètre, effet de la diffraction, processus de numérisation).
 - Limitation intrinsèque de la précision de l'appareil de mesure.
- Liées aux conditions environnementales :
 - Fluctuations d'origine thermique ou mécanique de la résistance des composants et des contacts électriques ;
 - Variation des tensions d'alimentation d'un capteur (ex : alimentation de l'ALI/AO), présence de parasites extérieurs (ex : signal de 50 Hz lié au réseau de distribution) ;
 - Vibrations mécaniques.

Exemples de causes d'erreurs systématiques

- Instrumentale : appareil défectueux ou sa mauvaise utilisation (zéro mal réglé, mauvais étalonnage, défaut de linéarité, bande passante outre-passée...).
- Environnementale : montage électronique erroné, ou faux contacts systématiques, fuite thermique, dérive de la température.

¹². À ce titre, la connotation négative du terme *erreur* se justifie pour l'erreur systématique puisqu'elle est susceptible d'être réduite par une amélioration des connaissances et du protocole. Par contre elle ne se justifie pas pour l'erreur aléatoire en raison du caractère fondamentalement naturel de la variabilité.

- **Observationnelle** : erreur de *parallaxe*¹³.
- **Théorique** : Existence d'un phénomène connu négligé (présence de frottements fluides ou solides, non-linéarité d'une interaction ou d'un capteur pour des signaux trop forts), ou inconnu.

d) Fidélité et justesse d'un instrument de mesure

DÉFINITIONS :

- **Justesse** : aptitude à donner des indications exemptes d'**erreur systématique**.
- **Fidélité** : aptitude à donner des indications très voisines lors de l'application répétée du même mesurande dans les mêmes conditions. Plus les mesures sont **dispersées**, moins l'instrument est fidèle.

Pour illustration, on présente sur la Fig. 2 ci-dessous le résultat de différentes séries de tirs sur une cible. La valeur du mesurande est représentée au centre.

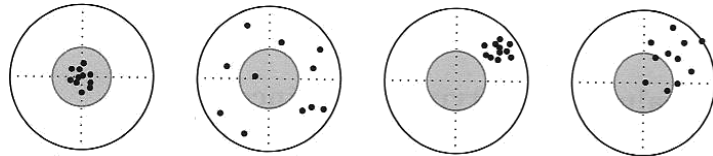


FIGURE 2 – De gauche à droite les cibles correspondent respectivement à un instrument de mesure i) fidèle et juste, ii) juste mais pas fidèle, iii) fidèle mais pas juste, et iv) ni juste ni fidèle.

II. Estimation pratique des incertitudes

Comme nous l'avons vu, l'**incertitude** $u(M)$ caractérise la **variabilité (ou dispersion)** des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande. Elle est donc définie typiquement par la **demi-largeur d'un intervalle de niveau de confiance déterminé**.

DÉFINITION : On appelle **incertitude-type** une incertitude de mesure évaluée par un **écart-type**, c'est-à-dire la racine carrée d'une **variance**.

¹³. La *parallaxe* est l'effet du changement de position de l'observateur sur ce qu'il perçoit, par exemple lors d'une lecture de graduation avec une direction de visée non orthogonale au plan des graduations (règle graduée, vernier, mire...).

II.1. Évaluation de type A de l'incertitude-type

L'évaluation de type A de l'incertitude-type est réalisée par l'**analyse statistique d'observations m_i répétées N fois dans les mêmes conditions**. La valeur du mesurande est alors estimée par la **moyenne arithmétique**

$$\bar{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i$$

On cherche donc à évaluer son écart-type

$$\sigma_{\bar{m}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \text{avec} \quad \sigma = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m}_{\infty})^2} \quad \text{et} \quad \bar{m}_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{m},$$

respectivement l'écart-type et l'espérance mathématique de la variable aléatoire m_i . Ne disposant que d'un nombre N fini d'observations, **on ne peut donc aussi qu'estimer l'écart-type σ** . On utilise pour cela l'estimateur non biaisé¹⁴ suivant :

$$\sigma_{\bar{m}} = \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}} \quad \text{avec} \quad \sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m})^2}.$$

DÉFINITION : L'**incertitude-type $u_A(M)$** est définie comme étant l'**écart-type sur la valeur moyenne \bar{m}** , dont le meilleur estimateur est

$$u_A(M) = \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}$$

II.2. Évaluation de type B de l'incertitude-type

a) Approche générale

L'évaluation de type B est effectuée par des moyens autres que l'analyse statistique de séries de mesures, et permet donc d'affecter une incertitude à **un mesurage réalisé une seule fois**. De façon générale, elle requiert un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles au sujet de la variabilité possible de la grandeur d'entrée. L'ensemble d'informations accumulées peut comprendre :

¹⁴. On serait tenter d'utiliser $\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m})^2}$, mais la variable aléatoire σ_N^2 n'a pas pour espérance σ^2 . On dit qu'elle est biaisée. On utilise donc l'**écart-type corrigé σ_{N-1}** , dont le carré est sans biais.

- des mesures antérieures ;
- l'expérience ou la connaissance générale du comportement et des propriétés des matériaux et des instruments utilisés ;
- les spécifications du fabricant ;
- les données fournies par les certificats d'étalonnages ou autres certificats ;
- l'incertitude assignée à des valeurs de référence provenant d'ouvrages ou de manuels.

En pratique pour ce qui est des Travaux Pratiques au laboratoire, nous rencontrerons principalement les sources d'incertitudes suivantes, qui peuvent toujours être évaluées en définissant un **intervalle de valeurs possibles** $[m_{\min}, m_{\max}]$.

- **Incertitude de lecture :**
 Pour un appareil de mesure analogique (appareil à cadran, lecture d'un régal, d'un vernier, graduations d'un écran d'oscilloscope...) il existe toujours un intervalle de valeurs possibles dont la longueur est celle de **la plus petite division perceptible** (résolution).
 Pour un appareil numérique à affichage digital, cet intervalle correspond aux **fluctuations observées du dernier digit**.
 Lors d'une lecture d'une courbe sur écran, cet intervalle est en général contrôlé par le **niveau de bruit** se superposant au signal, qui donne au trait son épaisseur. Au minimum il sera minoré par l'intervalle de quantification, qui est égal au calibre choisi divisé par le nombre de niveaux de quantification (2^p pour un CAN¹⁵ à p bits).
- **Incertitude de méthode :** Certaines méthodes de mesure autorisent une certaine plage de valeurs possibles par le procédé de détection lui-même.
Exemple : Lors du positionnement d'une lentille pour la mise-au-point d'une image, il existe une incertitude liée au pouvoir de résolution de l'oeil (nu ou équipé d'un instrument tel que le viseur) due à la profondeur de champ, ainsi qu'au caractère non stigmatique de la lentille (aberrations géométriques et chromatiques).
- **Incertitude constructeur :**
 À moins qu'elles ne fournissent directement l'incertitude-type (très rare), les données du constructeur se traduisent d'une façon ou d'une autre par la donnée d'un **intervalle de valeurs possibles**.

b) Cas d'une source d'incertitude unique

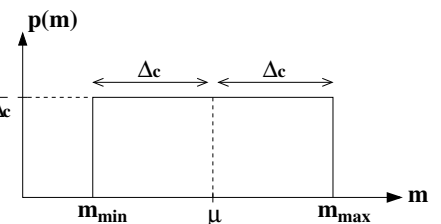
On est donc généralement ramené à évaluer un écart-type pour une variable aléatoire dont on ne connaît que l'intervalle des valeurs possibles $[m_{\min}, m_{\max}]$, centré sur la moyenne $\mu = \frac{1}{2}(m_{\min} + m_{\max})$ et de largeur $2\Delta_c = m_{\max} - m_{\min}$. En l'absence d'autres informations (notamment statistiques), l'incertitude-type s'écrit alors

$$u_B(M) = \frac{\Delta_c}{\sqrt{3}} = \frac{|m_{\max} - m_{\min}|}{\sqrt{12}}$$

DÉMONSTRATION :

On suppose que la distribution de probabilité $p(m)$ est uniforme sur cet intervalle (cf Fig. 3), d'espérance $\bar{m} = \mu$.
 Pour satisfaire la normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(m) dm = 1$$



on doit avoir $p(m) = \frac{1}{2\Delta_c}$ dans le domaine possible et $p(m) = 0$ en dehors.
 FIGURE 3 – Distribution de probabilité uniforme sur un intervalle $[m_{\min}, m_{\max}]$.

L'incertitude est alors évaluée en calculant l'écart-type d'une telle distribution continue :

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p(m) (m - \mu)^2 dm} = \sqrt{\frac{1}{2\Delta_c} \int_{\mu-\Delta_c}^{\mu+\Delta_c} (m - \mu)^2 dm} = \frac{\Delta_c}{\sqrt{3}} \quad \square$$

Exemple : Les quatre anneaux de couleur caractérisant la résistance sont Brun, Noir, Noir, Or. La résistance est donc égale à $R = 10 \Omega \pm 5\%$. L'incertitude-type associée est égale à $u(R) = \frac{10 \times 0,05}{\sqrt{3}} \approx 0,29 \Omega$.

Exemple : Thermomètre : « Range -200 to +700° C, Temperature resolution below 700° C : 0,01° C. »

On considère que l'indication constructeur est l'incertitude maximale liée à la résolution. L'incertitude due à la résolution associée à une mesure de 18,545° C est : $u(T) = \frac{0,01}{\sqrt{3}} = 0,0056^\circ C$.

Exemple : Boîte à décades : « Range : 1 Ω to 1,11 MΩ, number of decades : 5, full scale accuracy 0,1%.»

On considère que l'indication du constructeur est l'incertitude maximale.

15. Convertisseur Analogique Numérique

L'incertitude de type B associée à une boîte réglée sur 10 kΩ est alors : $u(R) = \frac{10000 \times 0,001}{\sqrt{3}} = 5,8 \Omega$.

Exemple : On cherche à mesurer une tension de 0,9 V à l'aide d'un voltmètre de classe 2, réglé sur le calibre 100 V. Le résultat lu est 3 V et reste constant. Le calibre est-il bien choisi ?

Un voltmètre de classe 2 sur calibre 100 V induit une erreur absolue de $0,02 \times 100 = 2$ V. L'incertitude type est alors $u(v) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1$ V.

Sur la mesure d'une tension de 3 V, l'incertitude relative est alors de $1,1/3 = 38\%$. Le calibre est mal choisi car la sensibilité du voltmètre n'est pas suffisante pour mesurer 0,9 V.

c) Incertitude-type composée

En présence de plusieurs sources d'incertitude $u_1(\mathbf{M}), u_2(\mathbf{M}), \dots$ on calcule l'incertitude composée par

$$u_B(\mathbf{M}) = \sqrt{u_1(\mathbf{M})^2 + u_2(\mathbf{M})^2 + \dots}$$

Cette formule de composition repose sur le fait que **la variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes est la somme des variances de chacune.**

REMARQUE : Il n'est pas rare qu'une des incertitudes soit nettement plus grande que les autres, de sorte qu'on puisse **n'en considérer qu'une seule pour les calculs.** Compte-tenu du passage au carré, **il suffit en fait d'un facteur 4 pour obtenir une incertitude évaluée à mieux que 10% près** ($\frac{1}{4^2} < 0,1$), ce qui suffit en général puisque l'on se limite souvent à un seul chiffre significatif pour l'incertitude.

II.3. Incertitude-type élargie et niveau de confiance

On souhaite augmenter la confiance en le résultat donné par un mesurage donné. Pour ce faire, on peut augmenter la probabilité que la valeur du mesurande figure dans l'intervalle obtenu par le mesurage, et ce en élargissant cet intervalle, c'est-à-dire en augmentant l'incertitude.

DÉFINITION : L'incertitude-type élargie est définie par

$$u_e(\mathbf{M}) = k u_X(\mathbf{M})$$

où $u_X(\mathbf{M})$ est l'incertitude-type déterminée précédemment ($X = A$ ou B) et k le facteur d'élargissement ($k > 1$).

Pour connaître le **niveau de confiance**, c'est-à-dire la probabilité p_M que la valeur du mesurande figure dans l'intervalle du mesurage, il est nécessaire de disposer d'une loi de probabilité décrivant la variable aléatoire permettant d'estimer \mathbf{m} (donc $\bar{\mathbf{m}}$ pour le type A ou \mathbf{m}_i pour le type B). Le niveau de confiance pour un intervalle symétrique $[\mathbf{m} - u(\mathbf{M}); \mathbf{m} + u(\mathbf{M})]$ centré sur l'estimation est alors l'aire sous la courbe de la distribution dans cet intervalle :

$$p_M = \int_{\mathbf{m} - u(\mathbf{M})}^{\mathbf{m} + u(\mathbf{M})} p(\mathbf{m}) d\mathbf{m}.$$

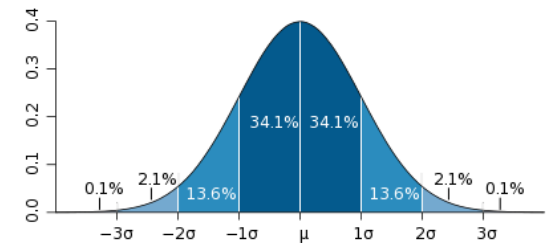
Comme précédemment indiqué, la distribution peut souvent être considérée gaussienne, c'est-à-dire vérifiant une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ (cf Fig. 4).

Dans ce cas on obtient par exemple

$$\int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} p(\mathbf{m}) d\mathbf{m} \approx 0,682$$

et

$$\int_{\mu - 2\sigma}^{\mu + 2\sigma} p(\mathbf{m}) d\mathbf{m} \approx 0,95.$$



L'incertitude-type ($k = 1$) correspond donc à un niveau de confiance $p_M = 68,2\%$.

En élargissant l'incertitude avec $k = 2$ on obtient $p_M = 95\%$.

FIGURE 4 – Proportion des aires correspondant à des intervalles donnés pour une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

III. Propagation des erreurs et incertitudes

Dans la section précédente, on a présenté comment évaluer une incertitude sur la mesure *directe* d'une grandeur. Lorsqu'on accède à la grandeur mesurée via un calcul à partir d'autres grandeurs mesurées de façon directe, on dit que la mesure est *indirecte*.

Exemple : Quelle est l'incertitude sur la résistance $R = \frac{u}{i}$ si l'on mesure tension et courant avec des incertitudes connues $u(u)$ et $u(i)$?

Il importe alors de savoir comment se propagent les erreurs dans la relation mathématique utilisée, afin de pouvoir évaluer l'incertitude finale.

Il existe deux approches pour évaluer la propagation des incertitudes.

- L'approche *différentielle*, qui permet de calculer la propagation à partir de relations construites sur la base du calcul différentiel.
- L'approche par *simulation numérique type Monte-Carlo*, qui permet de simuler directement la propagation en modélisant la variable mesurée directement par une loi de probabilité choisie.

La méthode Monte-Carlo remplace avantageusement la méthode différentielle lorsque les expressions deviennent compliquées, et surtout lorsque les incertitudes relatives sont grandes (grande variabilité, distributions peu piquées). Cette méthode est décrite en leçon de **Compétences numériques**¹⁶. Nous aborderons ici exclusivement la méthode différentielle, qui sera souvent suffisante dans les situations usuelles et pour un résultat rapide. Le but des paragraphes qui suivent est de montrer comment les relations de propagation sont construites. Seuls quelques cas cités ici seront à connaître, en dehors desquels la relation devra être fournie ou remplacée par une approche Monte-Carlo.

III.1. Cas monodimensionnel

Supposons que l'on mesure la grandeur X avec une incertitude $u(X)$, pour en déduire la grandeur Y par la relation

$$Y = f(X).$$

On note X_0 et $Y_0 = f(X_0)$ les valeurs des mesurandes X et Y , et x et $y = f(x)$ leur estimation respective lors d'un mesurage. On fait donc une erreur $\delta X = x - X_0$ sur X qui se répercute sous la forme d'une erreur $\delta Y = y - Y_0$ sur Y . Par définition de la dérivée, on a

$$\lim_{\delta X \rightarrow 0} \frac{\delta Y}{\delta X} = \frac{dY}{dX}(X_0) = \frac{df}{dX}(X_0) = f'(X_0)$$

On en déduit que **si les erreurs sont suffisamment petites, on peut remplacer la relation différentielle**¹⁷

$$dY = df = f'(X_0) \cdot dX \quad \text{par} \quad \delta Y = f'(X_0) \cdot \delta X.$$

Cela revient à exprimer δY via un développement limité à l'ordre 1 en négligeant le reste.

16. Voir https://www.armelmartin.mon-site-a-moi.fr/doc/info/cn2_monte_carlo.pdf

17. On appelle "différentielle de f en x_0 " la quantité $df = f'(X_0) \cdot dX$.

Incertitude

L'incertitude-type étant définie comme un écart-type des erreurs *aléatoires*, on transpose le raisonnement ci-dessus pour les erreurs aléatoires :

$$\delta Y_a = f'(\bar{x}_\infty) \cdot \delta X_a \quad \text{avec} \quad \delta X_a = x_i - \bar{x}_\infty \quad \text{et} \quad \delta Y_a = y_i - \bar{y}_\infty.$$

Cette relation de proportionnalité est alors vérifiée aussi par les incertitudes, à ceci près que ces dernières sont définies positives¹⁸, ce qui donne :

$$u(Y) = |f'(\bar{x}_\infty)| \cdot u(X)$$

Enfin, gardons à l'esprit qu'en pratique la valeur vraie \bar{x}_∞ est inconnue, donc à la place on évalue la dérivée au point d'estimation du mesurande x (si type B) ou \bar{x} (si type A), qui a priori est très proche¹⁹ de \bar{x}_∞ :

$$u(Y) = |f'(x)| \cdot u(X) \quad \text{ou} \quad u(Y) = |f'(\bar{x})| \cdot u(X)$$

Incertitude relative

On obtient

$$\frac{u(Y)}{|y|} = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| u(X) = \left| \frac{d \ln |f(x)|}{dx} \right| u(X)$$

On remarque donc qu'on peut obtenir directement l'incertitude relative sans passer par l'incertitude elle-même, en calculant directement la *dérivée logarithmique* de f , c'est-à-dire en différenciant directement la fonction $h(x) = \ln |f(x)|$.

CONCLUSION : Dans le cas mono-dimensionnel, la propagation des incertitudes s'obtient en différenciant la fonction au point d'estimation du mesurande, puis en prenant la valeur absolue et en remplaçant les différentielles par des incertitudes ($d \rightarrow u(\)$). L'incertitude relative est obtenue de la même façon mais en prenant la différentielle logarithmique.

Application - cas usuels

- **Translation** : $Z = X + a$ (où $a \in \mathbb{R}$) donne $u(Z) = u(X)$

18. En effet, si les erreurs aléatoires vérifient $\delta Y_{ai} = \alpha \delta X_{ai}$, alors le calcul de l'écart-type donne : $\sigma_{N-1}(Y) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \delta Y_{ai}^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \alpha^2 \delta X_{ai}^2} = |\alpha| \cdot \sigma_{N-1}(X)$.

19. En réalité, le développement limité peut être fait en prenant x comme point de référence au lieu de x_0 : $(y_0 - y) = f'(x)(x_0 - x)$, ce qui conduit au même résultat.

- **Linéarité** : $Z = \alpha X$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) donne $u(Z) = u(\alpha X) = |\alpha| u(X)$ et $\frac{u(Z)}{z} = \frac{u(X)}{x}$.
- **Inversion** : $Z = \frac{1}{X}$ donne $u(Z) = u\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{u(X)}{x^2}$ et $\frac{u(Z)}{z} = \frac{u(X)}{x}$.

III.2. Cas multidimensionnel

Dans le cas général, une mesure indirecte dépend de plusieurs grandeurs mesurées de façon directe et auxquelles sont associées des incertitudes. Comme dans le cas mono-dimensionnel, la propagation des erreurs est obtenue par le calcul différentiel, mais généralisé à plusieurs dimensions.

Considérons par exemple un cas bi-dimensionnel²⁰ ; le résultat sera généralisable à un nombre quelconque de variables. La grandeur Z est reliée aux grandeurs X et Y , par

$$Z = f(X, Y).$$

Les mesures directes de X et Y sont affectées des incertitudes $u(X)$ et $u(Y)$.

Dérivées partielles

Pour la différenciation, la fonction $Z = f(X, Y)$ peut être visualisée comme une surface dans l'espace à trois dimensions : la hauteur Z varie en fonction de la position horizontale (X, Y) . Lorsque l'on se déplace sur une courbe plane (cas précédent $Y = f(X)$), il existe une unique pente $f'(X)$. Par contre lorsque l'on se déplace sur une surface, la pente dépend de la direction dans laquelle on marche. Pour exprimer cela, on calcule la pente dans les deux directions privilégiées des axes (O_X) et (O_Y) , c'est-à-dire en se déplaçant sur des sections planes de la surface par des plans $Y = \text{constante}$ et $X = \text{constante}$. Ces pentes sont appelées *dérivées partielles selon X ou selon Y* , et définies respectivement par

$$\frac{\partial f}{\partial X}(X, Y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(X+\varepsilon, Y) - f(X, Y)}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(X, Y+\varepsilon) - f(X, Y)}{\varepsilon}.$$

Elles permettent de calculer la variation élémentaire de f (ou différentielle de f en (X, Y)), notée df , pour un déplacement élémentaire (dX, dY) selon n'importe quelle direction en partant du point (X, Y) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial X}(X, Y) dX + \frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y) dY.$$

20. Par exemple ci-dessus, la résistance R est une fonction de deux variables $R = f(u, i) = \frac{u}{i}$.

En assimilant les erreurs aléatoires aux différentielles comme pour le cas 1D, on obtient la loi de propagation des erreurs :

$$\delta Z = \frac{\partial f}{\partial X}(x, y) \cdot \delta X_a + \frac{\partial f}{\partial Y}(x, y) \cdot \delta Y_a$$

où x et y représentent les estimations de X et Y par le mesurage.

Incertitude (somme des variances)

Comme dans le cas de la composition de plusieurs incertitudes d'origine différente, on invoque le fait que si les erreurs aléatoires δX_a et δY_a sont **indépendantes**, la variance de leur somme est la somme de leurs variances. Ceci se traduit en termes d'incertitudes-types par

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X} \cdot u(X)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \cdot u(Y)\right)^2}$$

où les dérivées partielles sont évaluées au point d'estimation (x, y) .

Incertitude relative

Comme dans le cas mono-dimensionnel, on peut obtenir l'incertitude relative en appliquant la même méthode sur la fonction $h(X, Y) = \ln |f(X, Y)|$, c'est-à-dire en calculant la différentielle logarithmique :

$$\frac{u(Z)}{|z|} = \Delta \ln |f| = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial X} u(X)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial Y} u(Y)\right)^2}$$

Les lois s'écrivant souvent sous forme de produits de puissances, le calcul de l'incertitude relative par la différentielle logarithmique est souvent plus simple que celui de l'incertitude simple. Dans ces conditions, il est plus facile d'obtenir l'incertitude en passant par l'incertitude relative.

Application - cas usuels

- **Combinaison linéaire** : $Z = \alpha X + \beta Y$ donne

$$u(Z) = \sqrt{\alpha^2 u(X)^2 + \beta^2 u(Y)^2},$$

avec en particulier $u(X \pm Y) = \sqrt{u(X)^2 + u(Y)^2}$.

- **Produit de puissances** : $Z = k X^\alpha Y^\beta$ donne

$$\frac{u(Z)}{|z|} = \sqrt{\alpha^2 \frac{u(X)^2}{x^2} + \beta^2 \frac{u(Y)^2}{y^2}},$$

avec en particulier $\frac{u(XY)}{|xy|} = \frac{u(X/Y)}{|x/y|} = \sqrt{\frac{u(X)^2}{x^2} + \frac{u(Y)^2}{y^2}}$.

Dans le cas du produit de puissances il est plus aisé de calculer d'abord l'incertitude relative, puis d'en déduire l'incertitude si besoin.

Exemple : Pour la résistance $R = \frac{u}{i}$, on obtient $u(R) = \sqrt{\left(\frac{u(u)}{i}\right)^2 + \left(\frac{u(i)}{i^2}\right)^2}$,

ce qui mène à $\frac{u(R)}{R} = \sqrt{\left(\frac{u(u)}{u}\right)^2 + \left(\frac{u(i)}{i}\right)^2}$. Cette dernière relation s'obtient immédiatement en passant par la différentielle logarithmique. Inversement on peut l'utiliser pour calculer $u(R) = R \sqrt{\left(\frac{u(u)}{u}\right)^2 + \left(\frac{u(i)}{i}\right)^2}$.

REMARQUE : Dans le cas où une source d'incertitude domine l'autre (ou les autres si plus de 2 variables), les formules ci-dessus se ramènent aux formules trouvées dans le cas mono-dimensionnel. Ainsi, une évaluation rapide de l'ordre de grandeur de chaque contribution à la variance totale peut parfois simplifier le calcul d'incertitude.

IV. Présentation des résultats numériques

IV.1. Chiffres significatifs

a) Définitions

- o **Notation scientifique** : représentation d'un nombre décimal sous la forme $x = \pm a \times 10^n$.
 a est un nombre décimal (*significande* ou *mantisse*) à **un seul chiffre non nul à gauche de la virgule**, puis un nombre variable de décimales qui dépend de la précision. n est un entier.
- o **Chiffres significatifs** : tous les chiffres d'un nombre qui ne peuvent être éliminés par le passage en notation scientifique. En particulier les zéros placés en dernier dans les décimales sont significatifs.

Exemple : $0,00274 = 2,74 \times 10^{-3}$ comporte trois chiffres significatifs, alors que $0,002740 = 2,740 \times 10^{-3}$ en comporte quatre.

REMARQUE : Si on ne dispose pas d'information concernant la manière dont les nombres sont obtenus, **le nombre de chiffres significatifs indique la précision**.

Exemple : Ecrire $m = 11,597 \text{ kg}$ signifie que $11,5975 \text{ kg} > m > 11,5965 \text{ kg}$.

Attention : lors de conversions d'unités ou de passage d'unités à leurs multiples ou sous multiples, il faut veiller à la conservation du nombre de chiffres significatifs.

Exemple : $m = 11,6 \text{ kg} = 11,6 \times 10^3 \text{ g}$ (3 chiffres significatifs) mais pas 11600 g (5 chiffres significatifs).

b) Arrondis (au plus proche, ou arrondi arithmétique)

La méthode la plus courante consiste à :

- choisir le dernier chiffre à conserver,
- augmenter ce chiffre d'une unité si le chiffre suivant vaut au moins 5 ("arrondissement par excès"),
- conserver ce chiffre si le suivant est strictement inférieur à 5 ("arrondissement par défaut")

Exemple : $3,046 = 3,05$.

Arrondi en présence d'un logarithme ou d'une exponentielle :

La fonction logarithme apparaît beaucoup en Chimie (pH , pK , etc), mais aussi en physique (décibels...). Le comportement de la fonction $y = 10^x$, rapidement variable avec x , entraîne une règle adaptée :

Il y a autant de chiffres significatifs pour y que de chiffres significatifs après la virgule dans son logarithme $x = \log_{10} y$.

Exemple : On part d'un pH de 8,9, donc théoriquement $8,85 < pH < 8,95$. On a donc $10^{-8,85} = 1,1 \cdot 10^{-9} < y < 10^{-8,95} = 1,4 \cdot 10^{-9}$. Cela montre que le deuxième chiffre significatif de y n'est pas certain, alors que le pH en a deux.

IV.2. Présentation d'un résultat de mesure**a) Grandeur, incertitude, unité, niveau de confiance**

L'écriture du résultat du mesurage M prend la forme générale

$$M = m \pm u(M) \quad , \quad \text{unité} \quad (, \quad \text{niveau de confiance}).$$

En l'absence de niveau de confiance indiqué explicitement, le lecteur supposera implicitement que l'incertitude fournie est une incertitude-type non élargie (écart-type).

EN PRATIQUE : Il est utile de savoir que, sous l'hypothèse d'une distribution statistique gaussienne des erreurs, le niveau de confiance est de **68% pour l'incertitude-type, et 95% pour l'incertitude élargie à 2σ** . Toutefois, en l'absence d'informations sur la distribution on peut éluder la question.

Toutefois il est impératif de préciser explicitement comment cette incertitude a été obtenue.

b) Chiffres significatifs

- o Pour la valeur de l'incertitude $u(M)$ elle-même, obtenir une précision plus petite que quelques % correspond à des conditions de mesure très contraignantes et coûteuses (il faut répéter la mesure N fois avec N très grand). Dans la très grande majorité des cas, on se limite donc à **un voire deux chiffres significatifs pour l'incertitude**.
- o Pour l'estimation de la grandeur mesurée m , on prendra comme **dernier chiffre significatif** celui de même position (au sens de la numération) que celui de l'**incertitude**.

Exemple : On mesure $r = 100,251389 \Omega$ avec une incertitude $u(r) = 0,812349 \Omega$. On écrit alors le résultat sous la forme $R = (100,3 \pm 0,8) \Omega$.

c) Discussion de la qualité du résultat - écart normalisé

En l'absence de toute valeur de référence, seule l'**incertitude relative** $\frac{u(M)}{m}$ constitue en soi une évaluation qualitative de la qualité du mesurage. Dans le cadre académique, on pourra généralement considérer la mesure précise dessous de 1%, même si cela dépend en réalité du domaine expérimental choisi.

Cependant, la plupart du temps le but du mesurage proposé est la validation d'une théorie, d'une loi, et plus généralement d'une démarche scientifique. On est alors amené à **comparer la valeur estimée m à une valeur de référence** (issue de tables et digne de confiance, ou indiquée par le constructeur...) ou une valeur obtenue par une méthode de mesure différente. On notera m_r cette valeur, et $u(M_r)$ son incertitude-type. On évalue alors l'*écart normalisé* E_N (aussi appelé *z-score*) par

$$E_N = \frac{|m - m_0|}{\sqrt{u(M)^2 + u(M_r)^2}},$$

qui prend la forme simplifiée suivante,

$$E_N = \frac{|m - m_0|}{u(M)},$$

lorsque $u(M_r) \ll u(M)$ ou supposée comme telle.

CRITÈRE DE COMPATIBILITÉ USUEL²¹ :

- Si $E_N < 2$, les deux estimations sont considérées **compatibles** ;
- Si $E_N \geq 2$, les deux estimations sont considérées **incompatibles** ;

INTERPRÉTATION : D'après les règles de composition des incertitudes, et comme m et m_r sont a priori statistiquement indépendantes puisqu'obtenues via deux expériences différentes, on a alors

$$u(M - M_r) = \sqrt{u(M)^2 + u(M_r)^2}.$$

Si la variable aléatoire $m - m_r$ peut être considérée gaussienne d'espérance nulle, elle a alors seulement 5% de chances d'être située en dehors du domaine d'incertitude élargie $[-2u(M - M_r); 2u(M - M_r)]$.

²¹. En toute rigueur ce critère dépend du domaine d'application et du niveau d'exigence requis. Par exemple en physique des particules, le seuil de détection d'une nouvelle particule est $E_N \geq 5$.

V. Analyse graphique

V.1. Règles générales

Le but d'une expérience est souvent de dégager une relation entre les grandeurs mesurées, pour **vérifier une loi connue ou en extraire des paramètres physiques**. Cela passe par la réalisation d'un graphe expérimental. Quelques règles sont à respecter :

- Les valeurs numériques des *mesures brutes*, c'est-à-dire issues de la lecture sur l'instrument et avant tout calcul, doivent figurer sur le compte-rendu (tableau). Si un traitement est nécessaire, les valeurs d'abscisse et d'ordonnée obtenues indirectement par calcul figurent aussi dans le tableau. On précise toujours les unités, et on respecte un nombre vraisemblable de chiffres significatifs ;
- Le tracé est fait avec un crayon à papier fin.
- On utilise si possible une pleine page A4, ou A5. Une échelle trop petite réduit la précision. La partie utile du graphe occupe si possible tout l'espace disponible.
- Légèrer et annoter le graphe : titre, grandeurs sur les axes, unités, pentes ou valeurs déterminées graphiquement, équation d'une régression linéaire...
- Le tracé des "points" de mesure doit faire apparaître les incertitudes sur x (abscisse) et y (ordonnée), si celles-ci sont significatives et visibles à l'échelle du graphe. Dans l'absolu un point de mesure doit donc ressembler à \boxplus , la longueur des côtés étant la valeur des incertitudes respectives. Si l'incertitude selon l'un des 2 axes est négligeable, on enlève les 2 côtés correspondants (cf Fig. 5).
- Calculatrices : il est nécessaire de savoir programmer une régression linéaire, et plus généralement des opérations numériques globales sur des vecteurs (lignes ou colonnes de valeurs).
- Tableurs : si cela est possible l'usage du tableur facilite la saisie des valeurs et les calculs nécessaires. Quant à la représentation graphique, elle nécessite une mise-en-forme minimale (grilles de graduations principale et secondaire en fond, réduction à la zone de représentation utile sur les axes, légendes, utilisation d'un fond blanc pour l'impression...).

V.2. Régressions linéaires

Il n'y a véritablement que les relations linéaires qui puissent se prêter facilement, et de façon fiable, à une analyse graphique. Lors d'un

ajustement polynomial, logarithmique, exponentiel ou autre, il est moins facile de déceler une erreur systématique ou au contraire constater une disposition aléatoire des points autour de la courbe. On préférera donc la plupart du temps **mettre en forme la relation à vérifier pour qu'elle apparaisse comme une relation affine**.

À partir d'une série de n couples de mesures $(x_i, y_i)_{i \in [1, n]}$, on cherche à vérifier une relation $y = ax + b$, et/ou à déterminer les paramètres a et b . La méthode dite des **moindres carrés** pour estimer a et b présentée explicitement en leçon de **Compétences numériques**²², ainsi que les précautions qui doivent être prises dans son utilisation. On rappelle ici les principaux résultats.

- Les estimateurs \hat{a} et \hat{b} des paramètres a et b obtenus par la méthode des moindres carrés sont

$$\hat{a} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)} \quad \text{et} \quad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x},$$

où l'on a noté \bar{x} et \bar{y} les moyennes arithmétiques des observations.

- Dans le cas présent d'une relation affine, le *coefficient de corrélation* au carré r^2 s'identifie au *coefficient de détermination* R^2 , qui représente le **taux de variance expliquée** par le modèle affine :

$$r = \text{corr}(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x) \cdot \text{var}(y)}} \in [0, 1] \quad \text{et} \quad r^2 = R^2 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\text{var}(y)}.$$

avec $\hat{y}_i = \hat{a}x_i + \hat{b}$, la valeur de y modélisée.

Deux questions récurrentes se posent alors :

1. La relation $y = ax + b$ est-elle vérifiée ?
2. Si oui, quelles sont les incertitudes sur a et b ?

Le modèle est-il vérifié ?

La qualité du modèle affine choisi ne saurait être évaluée uniquement par la valeur du coefficient $r^2 = R^2$, et ce pour deux raisons essentielles.

- **Il n'existe pas de seuil standard ou universel pour $r^2 = R^2$ de part et d'autre duquel on puisse décider si le modèle linéaire est validé ou non.** Les valeurs communément admises dépendent non seulement du

22. Voir https://www.armelmartin.mon-site-a-moi.fr/doc/info/cn1_regression_lineaire.pdf

domaine expérimental considéré (cinétique chimique, optique géométrique, électronique, climatologie, astrophysique, économie, sociologie...), ainsi que du niveau de confiance que l'on choisit²³. Toutefois, pour les manipulations typiques réalisées en CPGE, on atteint couramment des coefficients de l'ordre de 0,99. En dessous de cette valeur, les écarts sont en général nettement visibles sur le graphe, et il faut plus d'investigation pour trancher.

- **Une représentation graphique est indispensable** pour constater que la répartition des points au voisinage de la droite du modèle est à la fois suffisamment homogène et distribuée d'une façon apparemment aléatoire. Les exemples du quartet d'Anscombe sont éloquentes à ce sujet (cf leçon de Compétences numériques).

REMARQUE : Lorsqu'il s'agit de **départager 2 modèles distincts** par deux régressions linéaires distinctes (ex : choix d'un modèle de force de frottement plutôt qu'un autre, choix d'une loi de vitesse en cinétique chimique...), le **coefficient $r^2 = R^2$ devient un moyen objectif et quantitatif de le faire**, à condition de toujours s'appuyer sur une représentation graphique.

Quelle est l'incertitude sur les estimateurs \hat{a} et \hat{b} ?

Lorsqu'un logiciel de type tableur est utilisé pour calculer les valeurs estimées \hat{a} et \hat{b} , celui-ci fournit aussi parfois une « incertitude » sur ces estimateurs. Toutefois, ces incertitudes doivent être considérées avec prudence si l'on ne sait pas comment elles sont calculées. En général elles sont fournies en l'absence de toute information sur les incertitudes $u(x_i)$ et $u(y_i)$ sur les valeurs mesurées, ce qui les rend inadéquates²⁴.

Deux méthodes sont alors possibles pour obtenir $u(\hat{a})$ et $u(\hat{b})$.

- La méthode des **droites extrêmes**, relativement simple mais subjective, et pas toujours applicable. Elle consiste à tracer deux droites de coefficient directeur et ordonnée à l'origine extrêmes²⁵ (supérieurement ou inférieurement par rapport à la droite du modèle), passant si possible à l'intérieur de toutes les cases d'incertitude des points de mesure (cf illustration en Figs.5-6

23. De façon générale, le fait de décider d'un résultat binaire à partir d'une collection plus ou moins complexe et diversifiée de données nécessite des techniques particulières qui ne peuvent être résumées à la seule notion de corrélation (cf *Analyse de données*).

24. Il est parfois possible, selon les logiciels de traitement, d'inclure les incertitudes dans la régression linéaire. Dans ce cas uniquement, les incertitudes Δa et Δb fournies par le logiciel ont un sens.

25. Dans le cas particulier où l'on cherche seulement à déterminer l'ordonnée à l'origine et que l'incertitude sur le coefficient directeur est faible ou supposée nulle, les droites extrêmes peuvent être prises parallèles à la droite du modèle.

et dans l'exemple ci-dessous).

Cette méthode n'est pas facile à appliquer lorsque les incertitudes des points sont très petites ou simplement sous évaluées par rapport à la dispersion apparente des points.

- La méthode par simulation Monte-Carlo, présentée en détail en leçon de Compétences numériques, est plus objective et donc plus fiable. On la préférera dès que possible, en réutilisant les scripts rencontrés en leçon.

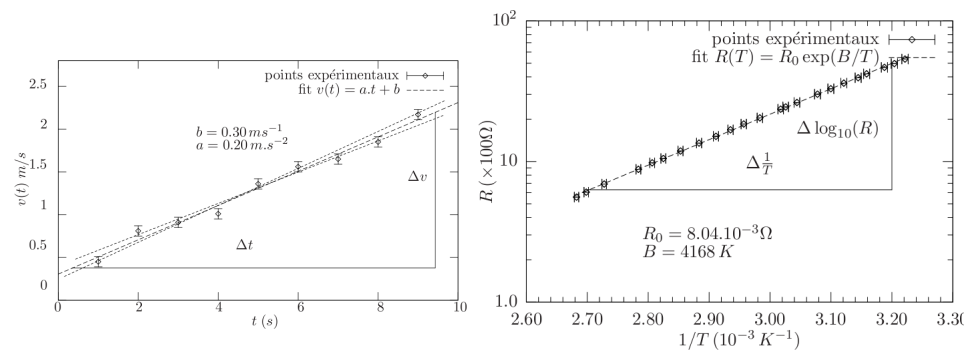


FIGURE 5 – Régression linéaire et droites extrêmes en échelles linéaires.

FIGURE 6 – Régression linéaire en échelles semi-log ou log (calibration d'une thermistance, cf ci-dessous).

Exemple : Considérons l'étalonnage d'une thermistance en vue de son utilisation comme capteur de température. Dans un domaine restreint de température, il est possible de modéliser l'évolution de la résistance par une loi exponentielle de la forme :

$$R(T) = R_0 \exp\left(\frac{B}{T}\right)$$

On souhaite mesurer R_0 et B . On réalise une série de mesures de température (à l'aide d'un thermomètre auxiliaire, $T \in [37, 4; 99, 8]^\circ C$) et de résistance ($R \in [558; 5350] \Omega$). L'incertitude relative sur la résistance est $\frac{u(R)}{R} = 0,2\%$, quand l'incertitude sur la température est de $u(T) = 0,5 K$.

Solution : On va chercher à valider la relation linéaire

$$\ln R = \ln R_0 + \frac{B}{T},$$

donc tracer le graphe $\ln R = f\left(\frac{1}{T}\right)$. L'incertitude sur l'abscisse et l'ordonnée des

points du graphe s'obtient en différenciant :

$$u\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{u(T)}{T^2} \quad \text{et} \quad u(\ln R) = \frac{u(R)}{R} = 0,2\%$$

L'incertitude relative est obtenue par différenciation logarithmique, ou directement à partir du résultat précédent :

$$T u\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{u(T)}{T} < 0,16\% \quad \text{et} \quad \frac{u(\ln R)}{\ln R} = \frac{u(R)}{R \ln R} < 0,03\%$$

On voit donc que les incertitudes sur l'axe des ordonnées sont négligeables à l'échelle du graphique. Donc on peut évaluer seulement celles sur $\frac{1}{T}$ (abscisses). On dresse donc le tableau suivant, avec des colonnes à calculer et remplir à partir des données de mesure et des incertitudes (opérations vectorisées à la calculatrice)²⁶.

θ (°C)	R (100 Ω)	$\frac{1}{T}$ (K ⁻¹)	$\ln R$	$u\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{u(T)}{T^2}$ (K ⁻¹)
99,8	5,58			

REMARQUE : l'utilisation d'un papier semi-logarithmique peut simplifier le tracé de cette loi. Dans le cas où l'axe logarithmique est gradué en puissances de 10 (cf Fig. 6), cela veut dire que l'on travaille avec le logarithme décimal \log_{10} et non népérien. Il faudrait donc remplacer partout dans les expressions ci-dessus la fonction \ln par la fonction \log_{10} . On vérifie alors la loi :

$$\log_{10} R = \log_{10} R_0 + \frac{B}{\ln(10) \cdot T}.$$

Il faut donc faire attention à la détermination de la pente :

$$B = \frac{\Delta \ln R}{\Delta(1/T)} = \ln(10) \cdot \frac{\Delta \log_{10} R}{\Delta(1/T)}.$$

REMARQUE : On n'est pas obligé de spécifier une unité pour $\ln R$ (ou $\log_{10} R$) bien que ses valeurs dépendent de l'unité de R . Par contre, R_0 sera nécessairement obtenu avec la même unité que R .

²⁶. Par manque de temps, on peut évaluer une incertitude commune à tous les points de mesure, en ayant soin de prendre le maximum sur la série (évaluation pessimiste).

VI. Résumé pratique pour les TP

- S'assurer que l'instrument est correctement étalonné, correctement réglé et utilisé dans son domaine nominal (élimination des erreurs systématiques).
- Le plus souvent on ne conduit qu'une seule mesure et il faut donc faire une estimation de type B de l'incertitude.
- On recherche l'indication du constructeur si elle est disponible, sinon on estime l'écart maximal Δ_{\max} entre les valeurs possibles de la variable X et on prend

$$u(X) = \frac{\Delta_{\max}}{2\sqrt{3}}.$$

- Si plusieurs sources d'erreurs sont présentes, on calcule la plus forte si elle existe.
- S'il faut tenir compte de plusieurs incertitudes du même ordre, on les compose en sommant les variances :

$$u(X) = \sqrt{u_1^2(X) + u_2^2(X) + \dots}$$

En particulier, s'il existe une incertitude de lecture et/ou de méthode substantielle, on aura une formule du type

$$u(X) = \sqrt{u_{\text{constructeur}}^2(X) + u_{\text{lecture}}^2(X) + u_{\text{méthode}}^2(X)}$$

- Pour la propagation des incertitudes, on utilise usuellement la méthode différentielle (préférentiellement la différentielle logarithmique, qui fournit directement l'incertitude relative et qui est souvent plus facile à calculer²⁷), ou la méthode par simulation Monte-Carlo si le temps le permet, notamment pour les régressions linéaires.
- Lors du tracé des points de mesure, on représente les barres d'incertitude.

²⁷. Dans les cas complexes, la relation à utiliser sera donnée.

ANNEXE : Caractéristiques générales d'un appareil de mesure

Classe : La classe de précision d'un appareil est un pourcentage du calibre. Elle permet d'évaluer l'incertitude sur la mesure fournie par un appareil.

Fidélité ou répétabilité (repeatability) : c'est la qualité de l'instrument qui fournit des valeurs faiblement dispersées lors de mesures répétables.

Erreur de justesse (bias) : c'est l'erreur systématique de l'instrument. Elle est définie par l'écart entre la valeur d'un étalon et la moyenne d'un grand nombre de mesures obtenues dans des conditions de répétabilité. Réduire cette erreur est l'étalonnage de l'instrument.

Erreur de zéro (zero error) : c'est l'erreur de l'instrument pour une valeur nulle de la grandeur à mesurer (mesurande). Cette erreur de zéro est souvent compensable directement.

Calibre (nominal range) : C'est le maximum des valeurs mesurables avec un réglage donné (étendue des mesures).

Etendue de mesure : c'est l'intervalle de mesures dans lequel l'erreur de mesure spécifiée par le constructeur est garantie.

Sensibilité (sensitivity) : c'est le rapport $S = \frac{\Delta R}{\Delta E}$ de l'accroissement de la réponse ΔR , pour un accroissement ΔE du signal à mesurer. Si les résultats d'une mesure répétée ne varient pas, cela signifie que l'on a mal choisi (ou réglé) l'appareil de mesure : il ne voit pas les faibles variations du signal mesuré. Attention, sur un écran digital, le nombre d'afficheurs ne donne pas la sensibilité de l'appareil.

Résolution (resolution) : c'est la plus petite différence du dispositif afficheur perceptible. C'est la demi graduation pour un appareil à aiguille et le dernier chiffre affiché pour un appareil numérique.

En outre, un appareil de mesure est toujours caractérisé par un **temps de réponse fini**, c'est-à-dire une durée minimale à respecter pour obtenir une réponse satisfaisante. Plus généralement, pour des signaux variables la mesure n'est fiable que dans une certaine **bande passante** spécifiée.

Exemples :

- Un multimètre est caractérisé par une bande passante finie (quelques kHz en général). Toute mesure sur des signaux de fréquence plus élevée sera systématiquement erronée. Inversement, il est illusoire de chercher à obtenir une valeur moyenne ou efficace sur des signaux alternatifs de fréquence inférieure à quelques hertz, c'est-à-dire variant plus lentement que le temps de réponse.

- Les capteurs ont également un temps de réponse fini, qui dépend aussi potentiellement des montages électroniques de *conditionnement*²⁸ qui lui sont associés : photodiode (quelques nano-secondes selon modèle), phototransistor (de l'ordre de la micro-seconde), capteur piezo-électrique...

Important : En définitive, comme il s'agit toujours de mesurer une réponse à une excitation extérieure il faut toujours se demander si l'instrument (capteur et/ou électronique de conditionnement) peut répondre au signal que l'on cherche à mesurer.

²⁸. Un capteur joue en général le rôle de transducteur, c'est-à-dire qu'il transforme un signal de la grandeur mesurée en signal électrique (tension, faible en général). Il faut en général appliquer ensuite divers traitements à ce signal afin d'obtenir une valeur fiable et utilisable de la grandeur recherchée (filtrage, amplification, addition-soustraction, démodulation synchrone...). C'est le rôle du *circuit de conditionnement*.