

Diffusion Thermique

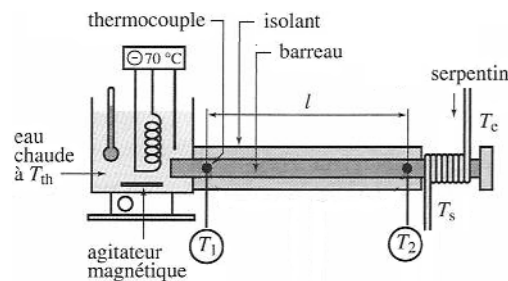
EX 1 – Production d'entropie dans une barre

On considère une barre en acier inox calorifugée de section $\Sigma = 10 \text{ cm}^2$ et de longueur $L = 1,0 \text{ m}$, de conductivité thermique $\lambda = 16 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, maintenue selon l'axe Ox en régime stationnaire entre deux parois de température constante $T_1 = 300 \text{ K}$ (en $x = 0$) et $T_2 = 400 \text{ K}$ (en $x = L$).

1. Exprimer le flux thermique Φ qui se propage selon $\vec{u}_x$. En déduire la production d'entropie par unité de temps $\dot{S}_p$ dans la barre entière. Application numérique.
2. Exprimer le taux local de production d'entropie volumique par unité de temps en x , noté σ_s . À quel endroit de la barre y a-t-il le plus de production d'entropie ? Application numérique.

EX 2 – Mesure d'une conductivité

On réalise le dispositif expérimental ci-contre, dans lequel un barreau de cuivre à section circulaire (capacité thermique massique c , masse volumique ρ , diamètre d) bien calorifugé latéralement, est chauffé à une extrémité grâce à un bain thermostaté (température T_{th}) et refroidi à l'autre par un écoulement d'eau dans un serpentin en contact direct (capacité thermique massique c_e , masse volumique ρ_e , débit volumique D_v).



À l'aide de thermocouples, on mesure la température d'entrée T_e et de sortie T_s de l'eau dans le serpentin, ainsi que les températures T_1 et T_2 de la barre en deux points espacés d'une distance ℓ . À température ambiante, la valeur tabulée de la conductivité thermique du cuivre est $\lambda = 390 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Données : $\ell = 10 \text{ cm}$; $d = 12 \text{ mm}$; $D_v = 0,50 \text{ cm}^3.\text{s}^{-1}$; $c = 0,23 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $c_e = 4,2 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $\rho = 10,5 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

1. Évaluer le temps nécessaire pour que le régime stationnaire s'établisse.
2. On mesure $T_{th} = 70^\circ\text{C}$, $T_1 = 66^\circ\text{C}$, $T_2 = 32,5^\circ\text{C}$, $T_e = 24,7^\circ\text{C}$, et $T_s = 30,8^\circ\text{C}$. Exprimer puis calculer λ . À quels facteurs peut être dû l'écart avec la valeur tabulée ? Comment améliorer la mesure ?

EX 3 – Expérience de Ingen-Housz (1789)

Une tige métallique cylindrique homogène horizontale d'axe Ox , de longueur ℓ , de rayon r , de conductivité thermique λ , est encastrée à l'une de ses extrémités dans un récipient contenant de l'eau portée à ébullition (température $T_0 = 100^\circ\text{C}$). Le reste de la tige est

en contact avec l'air ambiant de température $T_a = 20^\circ\text{C}$. L'écart de température entre la barre et l'air induit un flux surfacique conducto-convectif dirigé du solide vers l'air modélisé par la loi de Newton : $j_{Qc} = h(T - T_a)$.

1. On néglige les variations transversales de la température à l'intérieur de la barre, qui ne varie que selon x ($x = 0$ sur le récipient). Établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ en régime stationnaire. On introduira une distance caractéristique δ .
2. Exprimer $T(x)$ en supposant que la longueur de la tige est suffisamment grande pour que la température à l'autre extrémité puisse être confondue avec T_a .

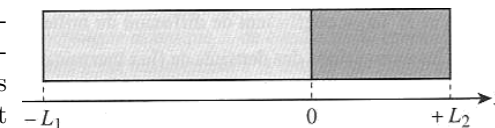
L'expérience de Ingen-Housz permet de comparer la conductivité thermique de différents métaux. On encastre maintenant deux barres dans le récipient d'eau bouillante, l'une en cuivre ($\lambda_{Cu} = 390 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) et l'autre en étain. Chaque barre est recouverte d'une fine couche de paraffine, dont la température de fusion est $T_f = 60^\circ\text{C}$.

3. Sur la barre de cuivre et sur celle d'étain, on observe la fusion de la paraffine jusqu'à l'abscisse $x_1 = 15,6 \text{ cm}$ et $x_2 = 6,4 \text{ cm}$ respectivement. En déduire la conductivité de l'étain.

EX 4 – Sensation de froid et de chaud

On étudie dans ce problème deux modèles destinés à interpréter le fait qu'en posant son doigt sur deux objets à température ambiante, l'un en bois l'autre en acier, on a l'impression que le bois est plus chaud que l'acier. Plus généralement et quelque soit la température des objets (plus froide ou plus chaude), l'écart de température ressenti par rapport à la température corporelle est plus fort avec l'acier que le bois. On adopte le modèle suivant.

Deux cylindres d'axe Ox supposés isolés latéralement, de même section S , de conductivités thermiques κ_1 et κ_2 , de masses volumiques μ_1 et μ_2 , de capacités thermiques massiques c_1 et c_2 , et de longueurs L_1 et L_2 , sont mis bout-à-bout en $x = 0$.



Le contact thermique est supposé parfait. On note T_i la température à l'interface $x = 0$. On suppose qu'aux extrémités $x = -L_1$ et $x = L_2$, la température est maintenue constante égale à T_1 et T_2 respectivement.

Pour les applications numériques on prendra $T_1 = 37^\circ\text{C}$ et $T_2 = 18^\circ\text{C}$, et les conductivités : $\kappa_{\text{doigt}} \approx 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\kappa_{\text{bois}} \approx 0,1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $\kappa_{\text{acier}} \approx 45 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Modèle stationnaire

1. Établir l'expression de $T(x)$ en régime stationnaire. En déduire que T_i s'exprime comme un barycentre des températures T_1 et T_2 .
2. On suppose $L_1 = L_2$ pour simplifier. Discuter les cas limites $\kappa_1 \ll \kappa_2$ et $\kappa_1 \gg \kappa_2$. Faire les applications numériques avec les données ci-dessus. Commenter.

3. En quoi ce modèle est-il critiquable? Donner un ordre de grandeur du temps nécessaire pour atteindre le régime stationnaire.

Modèle dynamique

Pour décrire plus correctement le phénomène sur les premiers instants, on ne se place plus en régime stationnaire mais en régime variable. On suppose les deux cylindres infinis respectivement vers la gauche et vers la droite, avec des températures T_1 et T_2 uniformes à l'instant initial $t = 0$, et toujours imposées aux extrémités : $\lim_{x \rightarrow -\infty} T(x, t) = T_1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x, t) = T_2$.

4. Établir l'équation de diffusion thermique vérifiée par $T(x, t)$, puis vérifier que la fonction

$$f_a(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-u^2} du \quad \text{avec} \quad X = \frac{x}{2\sqrt{at}} \quad \text{et} \quad a = \frac{\kappa}{\mu c}$$

est solution de cette équation. Comment s'appelle la constante a ?

5. Représenter l'allure de $f_a(x, t)$ en fonction de x pour plusieurs dates $t > 0$ croissantes. On donne $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x, t) = 1$.

En déduire l'expression de $T(x, t)$ en fonction de $f_{a_1}(x, t)$ d'une part et $f_{a_2}(x, t)$ d'autre part pour respecter les conditions aux limites.

6. En déduire l'expression de T_i comme un barycentre de T_1 et T_2 . On pourra introduire l'effusivité thermique de chaque matériau, $E_i = \sqrt{\mu_i c_i \kappa_i}$, dont on donnera l'unité.

7. Discuter les cas limites $E_1 \ll E_2$ et $E_1 \gg E_2$. Faire les applications numériques avec les données ci-dessous. Commenter.

Données (unité SI) : $E_{\text{doigt}} = 1,8 \times 10^3$ (SI); $E_{\text{bois}} = 0,4 \times 10^3$ (SI); et $E_{\text{acier}} = 14 \times 10^3$ (SI);

8. Comment expliquer que la température T_i à l'interface s'établisse quasi-instantanément lorsqu'on met en contact les deux cylindres à T_1 et T_2 ?

EX 5 – Isolation des fenêtres et des façades

On s'intéresse à un studio dans un immeuble en régime stationnaire, n'étant situé ni sur un pignon ni au rez-de-chaussée, ni sous les toits. Étant entouré de toute part par des appartements, on considère qu'il n'échange de la chaleur qu'à travers la façade qui le sépare de la rue. La température intérieure est $T_i = 22^\circ\text{C}$, et la température extérieure moyenne sur une journée (24h) est $T_e = 2^\circ\text{C}$. La façade est constituée :

- d'un mur en béton de surface $S_m = 8,0 \text{ m}^2$, d'épaisseur $e_b = 20 \text{ cm}$ et de conductivité thermique $\lambda_b = 0,92 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$;
- d'une fenêtre en simple vitrage de surface $S_f = 1,0 \text{ m}^2$, d'épaisseur $e_v = 4 \text{ mm}$ et de conductivité thermique $\lambda_v = 1,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Au niveau des contacts avec l'air intérieur et extérieur, le flux conducto-convectif surfacique dirigé du solide (T_s) vers l'air (T_a) est modélisé par la loi de Newton : $j_{Qc} = h(T_s - T_a)$, avec ¹ $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

- Montrer que le flux conducto-convectif se traduit par une résistance thermique additionnelle pour chaque paroi. En déduire la résistance thermique du mur, de la fenêtre², et de toute la façade.
- En déduire la perte thermique pour une journée en kWh, ainsi que le coût hors abonnement³. Commenter.

Le propriétaire de l'immeuble entreprend des travaux d'isolation et considère d'abord l'option consistant à simplement remplacer la fenêtre par du double vitrage 4x16x4 : deux vitres simples identiques à l'ancien vitrage (4 mm d'épaisseur) espacées d'une lame d'air de 16 mm, de conductivité thermique $\lambda_a = 0,026 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

- Évaluer la nouvelle résistance thermique de la fenêtre, puis représenter l'allure de la température $T(x)$ le long de la direction normale au verre. Le constructeur indique un coefficient de transfert thermique $U_g = 1,1 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Comment expliquer l'écart? Comment peut-on encore améliorer ce coefficient (en y mettant le prix)?
- Quel est l'économie journalière en pourcentage pour les mêmes conditions de température?

Finalement on décide aussi d'isoler la façade en ajoutant un doublage intérieur constitué

- d'une couche de laine de verre d'épaisseur $e_\ell = 10 \text{ cm}$ et de conductivité thermique $\lambda_\ell = 0,040 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$;
 - d'une paroi en plaques de plâtre d'épaisseur $e_p = 13 \text{ mm}$ et de conductivité thermique $\lambda_p = 0,35 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.
- Évaluer la nouvelle résistance thermique de la façade totale, et l'économie journalière en pourcentage pour les mêmes conditions de température, par rapport à avant les travaux. Quelles précautions importantes doivent être prises pour la bonne réalisation du doublage intérieur?
 - Quel serait le pourcentage d'économie d'énergie obtenu en mettant un pull et en baissant la température ambiante à 18°C en journée et 16°C la nuit (23h-6h)?

1. Le coefficient h dépend du fluide considéré (ici l'air), de l'inclinaison de la surface et de la présence éventuelle de vent (convection forcée).

2. En toute rigueur on évalue ici le vitrage uniquement, car les montants de la fenêtre (matière et type de structure) modifient la valeur pour la fenêtre entière. La réglementation utilise plutôt le coefficient de transfert thermique, noté U_g pour une vitre, ou U_w pour une fenêtre entière, qui n'est autre que l'inverse de la résistance thermique surfacique (en $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$), et exprime un flux thermique surfacique par degré de différence de température entre les deux côtés de la fenêtre/façade.

3. L'étudiant a souscrit un contrat EDF au tarif réglementé en option Base : le prix du kWh est de 0,2516 € au 16 février 2024.

EX 6 – Isolation d'un tuyau de ventilation

Un tube cylindrique de rayon a , d'épaisseur e , de longueur ℓ et de conductivité thermique λ est parcouru par un fluide de température T_1 , et entouré par l'air extérieur de température T_2 .

1. Dans un premier temps, on suppose l'égalité des températures du fluide et du solide au niveau de chaque interface solide-fluide. Établir l'expression de la résistance thermique du tuyau.
2. On prend maintenant en compte l'écart de température entre le solide et le fluide, en modélisant le flux surfacique dirigé du solide vers le fluide par la loi de Newton : $j_{Qc} = h(T - T_a)$ où h dépend du fluide. Montrer que cela revient à ajouter deux résistances thermiques que l'on exprimera.

On applique ce modèle à un tuyau de ventilation en PVC avec les données suivantes : $a = 8\text{ cm}$, $e = 4\text{ mm}$, $\ell = 4\text{ m}$, $\lambda = 0,17\text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$, $T_1 = 20^\circ\text{C}$ et $T_2 = 0^\circ\text{C}$.

3. Calculer le flux thermique latéral sortant en régime stationnaire. En déduire la quantité maximale d'eau liquide pouvant être liquéfiée par heure, par « condensation » sur les bords du tuyau en raison d'un tel flux, si l'air est suffisamment humide. On donne l'enthalpie de vaporisation de l'eau : $\ell_v = 2257\text{ kJ.kg}^{-1}$.
4. Sachant que le débit volumique d'air est de l'ordre de $D_v = 100\text{ m}^3\text{.h}^{-1}$, pour une humidité relative $h_r = 50\%$, calculer le débit massique par heure de vapeur d'eau transportée par le tuyau. Conclure.
Données : pression de saturation de l'eau à 20°C , $P_{\text{sat}} = 23,4\text{ mbar}$; masse molaire de l'eau $M = 18\text{ g.mol}^{-1}$, constante des gaz parfaits $R = 8,3\text{ J.mol}^{-1}\text{.K}^{-1}$.
5. Pour éviter qu'il y ait trop d'eau liquéfiée, on isole le tuyau en l'enveloppant d'une épaisseur $e_\ell = 4\text{ cm}$ de laine, de conductivité $\lambda_\ell = 0,05\text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$. De quel pourcentage a-t-on réduit la puissance thermique perdue et la quantité potentielle d'eau liquéfiée ?

EX 7 – Flux géothermique de surface

On considère un matériau homogène compris entre deux sphères concentriques de centre O , de rayons a et $b > a$, de conductivité thermique κ , de capacité thermique massique c et de masse volumique μ . Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues aux températures T_1 (pour $r = a$) et T_2 (pour $r = b$) et on suppose $T_1 > T_2$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée en régime stationnaire par la température $T(r)$ dans la coquille sphérique.
2. En déduire l'expression de sa résistance thermique R_{th} . Que retrouve-t-on si $b - a \ll a$?
3. On applique ce modèle à la *croûte continentale*, d'épaisseur moyenne $\ell = 35\text{ km}$, de conductivité moyenne $\kappa = 23\text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$, entre des températures moyennes $T_1 = 600^\circ\text{C}$ et $T_2 = 15^\circ\text{C}$. Calculer la puissance surfacique géothermique j_g traversant la croûte continentale.

4. En fait des éléments radioactifs dissipent une puissance volumique $\sigma_r = 3\text{ }\mu\text{W.m}^{-3}$ au sein de la croûte. Exprimer la température $T(r)$ dans la croûte et le nouveau flux géothermique j'_g en surface. Pour quelle proportion la radioactivité des roches contribue-t-elle ?

EX 8 – Ondes thermiques

On se propose d'étudier l'évolution de la température dans le sol en raison de l'évolution périodique de la température de surface. Cette dernière varie sur différentes échelles de temps en raison des différents facteurs climatiques : variations diurnes, saisonnières, millénaires et multimillénaires... On assimile localement le sol à un demi-espace homogène de masse volumique μ , de capacité thermique c et de conductivité thermique λ supposées constantes. On note $T(z, t)$ la température dans le sol à l'instant t et à la profondeur z ($z > 0$), $T_a(t)$ la température de l'air supposée égale à $T(0, t)$, et $\theta(z, t) = T(z, t) - T_a(t)$ l'écart de température. On s'intéresse à la réponse à une certaine échelle de temps. On modélise donc le forçage en surface sous forme sinusoïdale avec composante continue :

$$T_a(t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$$

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la quantité θ .
2. On cherche des solutions sous forme de pseudo OPPH. Vers quelle valeur doit tendre θ pour $z \rightarrow \infty$? Établir l'expression de la solution de pulsation ω et décrire la nature de l'onde. On pourra faire apparaître une distance caractéristique δ . Quelle analogie peut-on faire ?
3. On s'intéresse aux variations saisonnières. $T_a(t)$ représente donc la température moyenne hebdomadaire. En un lieu où $\delta = 16\text{ m}$, la température de la surface du sol passe vers le 1er janvier par un minimum à -10°C et vers le 1er juillet par un maximum à $+30^\circ\text{C}$. Vers quelle date la température est-elle minimale à la profondeur $z = 2\text{ m}$, et quelle est cette valeur minimale ? Commenter.
4. On considère une cave dont le plafond est situé à 2 m sous la surface extérieure. Les variations diurnes de température en surface (qui correspondent aux alternances jour-nuit) sont-elles perceptibles dans la cave ? Commenter.
5. La profondeur de l'inlandsis de l'antarctique (calotte glaciaire) dépassant les 4000 m de profondeur à son sommet, à quelle(s) échelle(s) de temps pourrait-on remonter en plaçant un thermomètre à cette profondeur ?
Données : Pour la glace $\lambda = 2,1\text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$; $\mu = 917\text{ kg.m}^{-3}$ et $c = 2,06\text{ kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$.
En réalité la glace est fondue à cette profondeur à cause de la pression. La méthode vous paraît-elle toutefois pertinente en comparaison avec la technique de l'analyse des carottes glaciaires, qui a fourni un enregistrement du climat passé sur 800000 ans grâce à une carotte de $3,27\text{ km}$ de longueur ⁴ ?

4. Projet Européen EPICA Dome C, 1996-2004. Un nouveau projet visant les derniers $1,5\text{ Ma}$ est actuellement en cours de forage (Beyond EPICA - Oldest Ice, 2021-2024) par le même groupe.