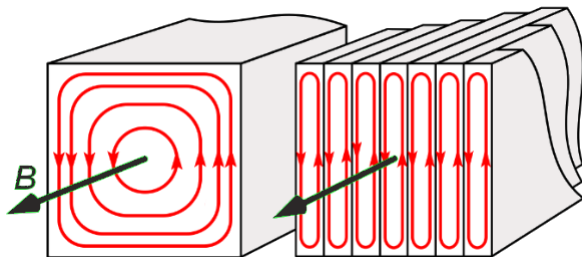


Équations de Maxwell

EX 1 – Courants de Foucault dans un cylindre

On place un cylindre conducteur d'axe (Oz) , de section $S_0 = \pi R^2$, de longueur L et de conductivité γ dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique et on néglige les effets de bord.



1. Établir les propriétés de symétrie du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ induit. Établir son expression dans le cylindre en utilisant le théorème de Stokes, et en se plaçant dans l'ARQS.

Retrouver cette expression en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday et le formulaire.

2. Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.
3. Que devient la puissance moyenne dissipée par effet Joule si au lieu d'un seul conducteur cylindrique, on utilise N conducteurs cylindriques identiques, de même longueur L , de section $S'_0 = \frac{S_0}{N}$ sachant que le volume total occupé par les N cylindres est le même que précédemment ? Expliquer l'intérêt du *feuilletage*, procédé qui consiste à diviser la section du noyau de fer en de multiples feuillets, pour la réalisation des transformateurs.

EX 2 – Décharge d'un conducteur dans l'air

Une boule conductrice, de centre O et de rayon R , porte initialement la charge Q_0 uniformément répartie. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité γ . À l'instant t , la boule porte la charge $Q(t)$.

1. Déterminer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à l'extérieur de la boule.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $Q(t)$. La résoudre. Commenter.
3. Calculer l'énergie cédée par le champ à la matière ainsi que la variation d'énergie électromagnétique. Conclure.

EX 3 – Résistance de fuite dans un condensateur cylindrique

On considère un condensateur cylindrique, de hauteur h , constitué de deux cylindres métalliques creux coaxiaux de rayon R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$) et d'axe (Oz) séparés par un milieu légèrement conducteur, supposé ohmique de conductivité γ . Le milieu possède permittivité diélectrique et une perméabilité magnétique assimilables à celle du vide.

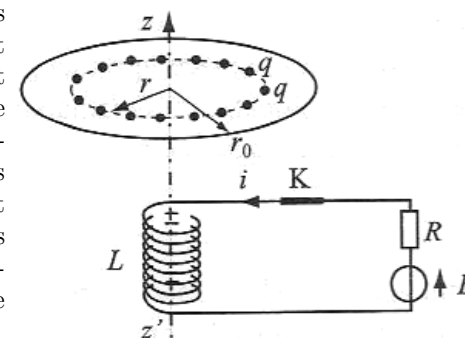
Dans toute l'analyse, on négligera les effets de bord, ce qui revient à considérer le condensateur de hauteur infinie.

Initialement, l'armature intérieure reçoit une charge Q et l'armature extérieure une charge nulle.

1. Vers quel état final le système évolue-t-il ? Déterminer le champ électrique à l'instant initial et à l'instant final. Que vaut le champ magnétique à tout instant ?
2. En déduire la variation d'énergie électromagnétique associée à cette transformation.
3. Quelle est la valeur du vecteur de Poynting au cours de cette transformation ? Que peut-on conclure quant à la variation de l'énergie électromagnétique calculée à la question précédente ?
4. Déterminer le vecteur densité de courant électrique à tout instant. En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans le système. Le bilan d'énergie global est-il correct ?

EX 4 – Expérience de Feynman

Un grand nombre N de charges électriques ponctuelles $q > 0$ sont réparties régulièrement sur un cercle de rayon r d'axe vertical (Oz) et solidaires d'un plateau circulaire de rayon r_0 de même axe, et de moment d'inertie J par rapport à cet axe. Le plateau peut tourner sans frottement autour de (Oz) et il est initialement au repos. Un solénoïde d'axe (Oz) est situé sous le plateau et est parcouru par un courant d'intensité i . Pour $t < 0$, l'intensité est supposée constante égale à $I > 0$.

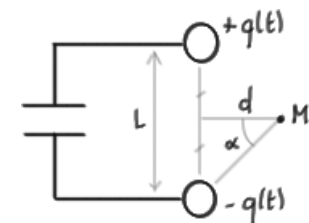


À $t = 0$ on ouvre l'interrupteur et le courant s'annule très vite. On suppose $i = 0$ pour $t > \tau$.

1. Montrer qualitativement que le disque se met à tourner et indiquer dans quel sens.
2. Exprimer la vitesse angulaire ω_0 acquise par le disque à l'issue de l'annulation du courant, en supposant connue l'inductance mutuelle M entre le solénoïde et le disque de rayon r (on négligera son inductance propre).

EX 5 – Champs créés par une étincelle

On considère la décharge électrique d'un condensateur de capacité 1nF dans l'air entre deux éclateurs formés par des boules de faible rayon, distants de 2 cm , et portant des charges opposées $+q(t)$ et $-q(t)$. Il passe alors un courant $i(t)$ d'une boule à l'autre pendant une durée de quelques microsecondes.



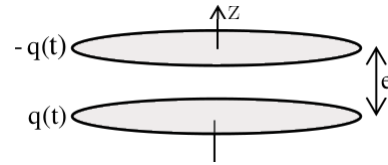
1. Pourquoi le courant peut-il passer dans l'air ? Quel est le champ électrique minimal qu'il faut obtenir ?
2. Évaluer la différence de potentiel permettant la décharge. Déterminer l'ordre de grandeur de l'intensité du courant électrique.
3. Déterminer une estimation du champ magnétique créé. Calculer celui-ci à 1 mm de l'étincelle. Comparer au champ magnétique terrestre. Pourquoi néanmoins cette étincelle peut-elle provoquer des perturbations dans un circuit électronique situé à cette distance ?
4. On peut faire un calcul plus fin du champ magnétique créé en utilisant la paramétrisation ci-dessus. En utilisant le th d'Ampère généralisé, montrer que dans le plan médiateur du segment formé par les deux éclateurs, le champ magnétique en M à la distance d du fil est donné par

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \sin \alpha \vec{e}_\theta$$

où α est le demi-angle sous lequel sont vus les deux éclateurs depuis le point M .

EX 6 – Condensateur plan en régime variable

On considère un condensateur plan formé de deux armatures circulaires de rayon a et d'axe (Oz) , séparées par une distance e , portant les charges totales $q(t)$ et $-q(t)$.



1. Établir les propriétés de symétrie des champs électrique et magnétique dans l'espace entre les armatures, ainsi que la forme des lignes de champ magnétique. Représenter l'allure qualitative des lignes de champ électrique dans le plan (Oxz) , en tenant compte des effets de bord.

On rappelle qu'au voisinage d'un métal parfait, les lignes de champ électriques sont orthogonales à la surface¹, et les lignes de champ magnétiques lui sont tangentes.

Modèle sans effets de bords, correction d'ordre 1

Dorénavant et pour toute la suite de l'étude, on néglige les effets de bord, si bien que les charges $q(t)$ et $-q(t)$ sont réparties uniformément.

2. Quelle conséquence cela a-t-il sur la direction des lignes de champ électrique ? Calculer le champ électrique entre les armatures dans le cadre de l'ARQS magnétique, qui sera noté $\vec{E}_0$. Retrouver la capacité C et l'énergie électrique stockée $\mathcal{E}_{e0}$.

1. Cette propriété a été démontrée en exercice dans le cadre du régime stationnaire. Nous reviendrons sur la question en régime variable dans le cadre du cours sur les ondes, et de la discussion de l'effet de peau.

3. Pourquoi l'ARQS magnétique n'est-elle pas satisfaisante ici ? Montrer qu'en considérant le courant de déplacement, on doit prendre en compte un champ magnétique $\vec{B}_1$ entre les armatures, que l'on exprimera à l'aide du théorème d'Ampère généralisé. En déduire que le condensateur contient une énergie magnétique caractérisée par une inductance L que l'on exprimera, et qu'elle est en série avec C .
4. Faire un bilan énergétique global dans ce cadre d'approximation. Peut-on dire que le bilan est fermé, c'est-à-dire que l'énergie électromagnétique est conservative ? Pour pallier ce problème, calculer le champ électrique $\vec{E}_1$ à ajouter à $\vec{E}_0$ pour satisfaire l'équation de Maxwell-Faraday. On utilisera pour cela une circulation sur un contour bien choisi. Retrouver le modèle électrocinétique équivalent $\{L - C\}$ proposé ci-dessus.

Modèle sans effets de bords, solution asymptotique

La correction précédente invalide de nouveau l'équation de Maxwell-Ampère et donc on s'oriente vers un calcul par corrections successives pour trouver de façon approchée la solution à ce problème dans lequel on a négligé les effets de bord. On suppose une variation sinusoïdale de la charge imposée, $q(t) = q_0 \cos(\omega t)$, et donc aussi de $\vec{E}_0$. On pourra travailler en notation complexe.

5. Calculer de proche en proche les corrections successives d'ordre p , et montrer que le champ électrique total peut s'écrire

$$\vec{E} = J_0(s) \cdot \vec{E}_0 \quad \text{avec} \quad J_0(s) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p!)^2} \left(\frac{is}{2} \right)^{2p}$$

où s est une fonction de r , ω et $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ que l'on explicitera. Qu'en est-il du champ magnétique total ?

6. Il se trouve que la fonction J_0 est solution de l'équation différentielle

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial f}{\partial s} \right) + f = 0$$

Aurait-on pu trouver la solution précédente plus simplement, sachant que pour un champ de vecteur quelconque $\vec{A}$:

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{A} \right) = \vec{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{A} \right) - \Delta \vec{A}$$

Modes propres d'une cavité cylindrique

On réalise une cavité résonante en fermant le condensateur ci-dessus par un cylindre creux en métal parfait, de section droite circulaire de rayon a et d'axe (Oz) .

7. Sachant que les trois premières racines positives de $J_0(s)$ sont approximativement 2,405, 5,52 et 8,65, déterminer les trois fréquences de résonance les plus basses de la cavité. A.N. pour $a = 3,75$ cm.