Électrostatique

EX 1 – Étude d'un champ particulier

On considère le champ vectoriel défini dans tout l'espace en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{E}(x, y, z) = k\, y\, \vec{e}_x + k\, x\, \vec{e}_y \quad , \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$

1. Montrer que ce champ est à circulation conservative.
2. Exprimer le potentiel électrostatique $V(M)$.
3. Déterminer la forme des surfaces équipotentielles, puis les représenter graphiquement dans le plan Oxy. En déduire l'allure des lignes de champ [1].
4. Indiquer les propriétés de symétrie de la distribution source. Comment pourrait-on la créer ?

EX 2 – Énergie réticulaire d'un cristal ionique à une dimension

La cohésion d'un cristal ionique est assurée par les interactions électrostatiques entre les ions, la répulsion entre les nuages électroniques imposant une distance minimale entre voisins. La disposition des ions sur le réseau réalise l'énergie potentielle minimale du système, appelée *énergie réticulaire*. Celle-ci est principalement donnée par l'énergie potentielle d'interaction électrostatique du système constitué par les ions supposés ponctuels.

1. Déterminer cette énergie $E_m = \mathcal{N}_A E$ pour une mole d'entités A^+B^- dans le cas d'un cristal ionique à une dimension constitué d'une chaîne alternée infinie d'ions monochargés A^+ et B^- distants de $d = 0,28\,\text{nm}$ (E représente cette énergie réticulaire par motif A^+B^-). On comparera E avec l'énergie d'interaction entre 2 voisins A^+ et B^-.
   On donne : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$.
2. À partir de ce cristal parfait, on crée alors une lacune dans ce cristal en déplaçant un ion du cœur vers la surface (du côté de l'ion de charge opposée), laissant ainsi un site inoccupé. Évaluer l'énergie E_f de formation de cette lacune, c'est-à-dire la variation d'énergie potentielle du système qui en résulte. On supposera qu'il n'y a pas de réarrangement des charges autour de la lacune. Commenter.

EX 3 – Mouvement d'un ensemble de particules chargées

On considère un système isolé constitué de six particules identiques de masse m et de charge q. Elles sont initialement positionnées aux centres des faces d'un cube d'arête a, et lâchées sans vitesse initiale.

1. Déterminer l'énergie potentielle d'interaction initiale du système.
2. Décrire qualitativement le mouvement des particules et donner une intégrale première du mouvement.
3. Quelle est la vitesse asymptotique des particules ?

EX 4 – Force d'interaction gravitationnelle entre deux corps à symétrie sphérique

Soient deux corps sphériques dont la masse volumique ne dépend que de la distance à leur centre respectif (masses (m, m'), centres (O, O') et domaines volumiques $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$). Calculer la résultante et le moment résultant en le centre (O ou O') des forces exercées par un objet sur l'autre. Montrer qu'il est justifié d'assimiler ces corps à des masses ponctuelles.

EX 5 – Caractéristiques électrostatiques du voisinage de la Terre

On observe à la surface de la Terre, par temps clair, un champ électrostatique vertical descendant $\vec{E}_{\text{sol}}$ de l'ordre de $100\,\text{V.m}^{-1}$, et on a mis en évidence l'existence d'une couche conductrice de l'atmosphère, l'*ionosphère*, à partir d'une altitude $h \approx 70\,\text{km}$. Cela conduit à modéliser de façon simplifiée l'état électrique de l'atmosphère par un condensateur sphérique dont la surface de la Terre et la base de l'ionosphère, appelée *électrosphère*, sont les armatures respectivement négative et positive. On suppose ainsi que la surface terrestre et l'électrosphère sont des sphères portant des charges opposées Q et $-Q$ (avec $Q > 0$) uniformément réparties. On rappelle le rayon terrestre moyen $R_T \approx 6370\,\text{km}$, et on suppose que la permittivité diélectrique relative de l'air est 1.

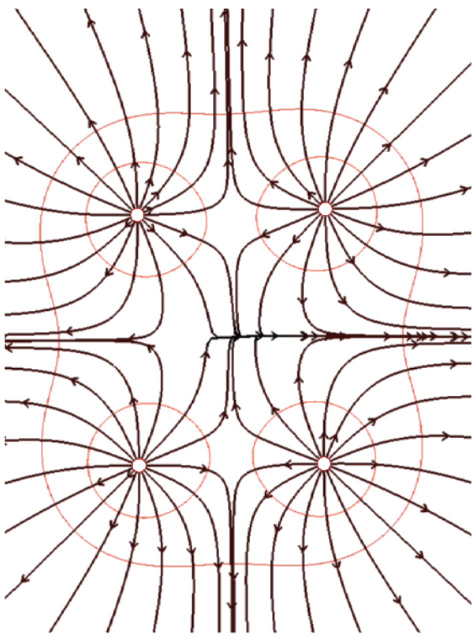
1. Déterminer le champ électrique régnant en tout point de l'espace compris entre les armatures, en fonction de la distance r au centre de la Terre. En déduire la valeur de Q et les densités surfaciques de charge σ_T et σ_E respectivement au niveau du sol et de l'électrosphère.
2. Calculer le potentiel dans la même région. En déduire la différence de potentiel entre la surface de la Terre et l'électrosphère. Comment s'exprime la capacité du condensateur sphérique ? Le résultat est-il très différent d'une modélisation avec un condensateur plan ?
3. Envisager le cas plus réaliste où la charge de l'électrosphère est répartie entre les altitudes $h_1 = 60\,\text{km}$ et $h_2 = 70\,\text{km}$, avec une densité volumique uniforme. Établir les nouvelles expressions du champ et du potentiel dans le domaine $r \in [R_T ; R_T + h_2]$. Représenter leur allure en fonction de r.

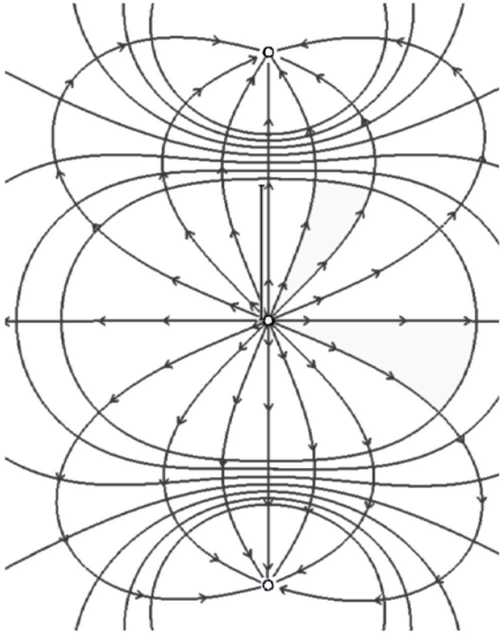
EX 6 – Champ électrostatique uniforme

Montrer que dans une région vide de charges, si les lignes de champ sont rectilignes et parallèles, alors le champ est uniforme.

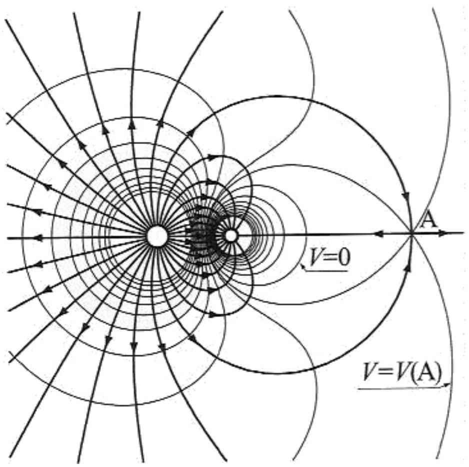
1. Question subsidiaire (non exigible) : montrer que les lignes de champ satisfont la forme $x^2 - y^2 = \pm a^2$ et $z = z_0$ où a et z_0 sont des constantes.

EX 7 – Analyse de cartes de champ et potentiel





À l'aide des cartes ci-dessus et ci-contre, déterminer dans chaque cas le plus d'informations possibles sur la distribution de charges sources. En particulier, on essaiera de localiser les sources, indiquer leur signe, comparer leur valeur absolue, et indiquer si la charge totale semble nulle ou non. On exploitera pour ce faire les propriétés de symétries éventuelles [a].



a. Attention : le principe de Curie stipule que les symétries des sources doivent se retrouver dans les effets, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie. Sans information supplémentaire on ne pourra ici que le supposer.

EX 8 – Distribution volumique à symétrie sphérique

On considère une boule chargée de rayon R et de densité volumique de charges $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$ pour $r \in [0, R]$.

1. Déterminer le champ et le potentiel dans tout l'espace au moyen du théorème de Gauss.
2. Même question en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss. On donne [2] pour un champ $\vec{A} = A(r)\vec{e}_r$ (en sphériques) : $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A(r))}{\partial r}$.

EX 9 – Distribution volumique à symétrie cylindrique

On considère un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R, chargé en volume par une densité volumique de charges $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$ pour $r \in [0, R]$.

1. Déterminer le champ et le potentiel dans tout l'espace au moyen du théorème de Gauss.
2. Même question en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss. On donne [3] pour un champ $\vec{A} = A(r)\vec{e}_r$ (en cylindriques) : $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA(r))}{\partial r}$.

EX 10 – Distribution volumique 1D

On considère une distribution volumique de charges vérifiant $\rho(z) = \rho_0$ pour $|z| \leq a$ et $\rho(z) = \rho_0 \frac{a^2}{z^2}$ pour $|z| > a$.

1. Déterminer le champ et le potentiel dans tout l'espace au moyen du théorème de Gauss.
2. Même question en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss.

EX 11 – Énergie d'interaction d'une distribution sphérique

On s'intéresse à l'énergie d'interaction $\mathcal{E}_e$ d'une distribution volumique uniforme à symétrie sphérique de rayon R, de charge totale Q.

1. Après avoir retrouvé l'expression du champ dans tout l'espace, calculer $\mathcal{E}_e$ en utilisant la densité volumique d'énergie électrostatique u_e.
2. On souhaite retrouver le résultat précédent en utilisant la définition opérationnelle de l'énergie d'interaction. Calculer $\mathcal{E}_e$ en supposant que la distribution a été construite en agglomérant progressivement des couches sphériques de charges d'épaisseur élémentaire dr en provenance de l'infini.
3. On applique maintenant ce modèle au noyau atomique de Tellure ${}^{136}_{52}Te$, de masse molaire $M = 127{,}6\,\mathrm{g.mol^{-1}}$. Comparer l'énergie électrostatique à l'énergie de liaison du noyau, liée à son *défaut de masse* par la relation suivante :

$$W_\ell = Zm_pc^2 + Nm_nc^2 - M_{\text{noyau}}c^2$$

où $m_n = 1{,}67493 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ et $m_p = 1{,}672649 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ sont les masses du neutron et du proton respectivement. On admettra que le rayon du noyau suit la loi donnée par le *modèle de la goutte liquide* : $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$ avec $R_0 = 1{,}4\,\mathrm{Fm}$.

2. En exercice, retrouver cette expression de la divergence d'un champ radial à symétrie sphérique grâce au théorème de Gauss sur une coquille sphérique de rayons r et $r + \mathrm{d}r$.
3. En exercice, retrouver cette expression de la divergence d'un champ axial à symétrie cylindrique grâce au théorème de Gauss sur une coquille cylindrique de rayons r et $r + \mathrm{d}r$ et de hauteur arbitraire.

EX 12 – Modèle électrostatique de l'atome d'Hydrogène

L'atome d'Hydrogène dans son état fondamental (électron dans l'orbitale $1s$ à symétrie sphérique en physique quantique) est équivalent à une distribution volumique qui crée un potentiel

$$V(r) = K\,q\,\frac{\mathrm{e}^{-2\frac{r}{a_0}}}{r}\left(1+\frac{r}{a_0}\right)$$

où $a_0 = 0,053\,\mathrm{nm}$ est le *rayon de Bohr*, q est la charge élémentaire et K est une constante.

1. Déterminer la charge $Q(r)$ contenue dans une sphère de rayon r. Examiner les limites $r \to 0$ et $r \to \infty$. Commenter, et en déduire la valeur de K.
2. Calculer la charge comprise entre les sphères de rayons r et $r + \mathrm{d}r$ et en déduire la distribution de charge volumique $\rho(r)$ pour $r > 0$.
3. Déterminer l'énergie potentielle d'interaction du proton et de l'électron. La comparer à l'énergie de liaison $E_\ell = 13,6\,\mathrm{eV}$ de l'atome d'Hydrogène dans son état fondamental. Expliquer la différence dans le cadre du modèle de Bohr de l'atome[4].

EX 13 – Zone de déplétion dans une jonction PN

On considère la jonction entre deux semi-conducteurs respectivement dopés N et P, de section S. À l'interface, la diffusion fait migrer les porteurs majoritaires (électrons si N, et trous si P), ce qui établit à l'équilibre une **zone de déplétion** d'épaisseur a, qui n'est pas localement neutre, au contraire du reste des semi-conducteurs. Le plan $x = 0$ représente l'interface, et on suppose les deux matériaux très étendus selon les directions y et z. La distribution de charges est modélisée par $\rho(x) = \rho_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ pour $x \in [-a; a]$ et $\rho(x) = 0$ en dehors.

1. Déterminer le champ $\vec{E}_+$ créé uniquement par la couche chargée positivement, dans tout l'espace.
2. En déduire le champ total dans tout l'espace.
3. Exprimer le potentiel dans tout l'espace. Que vaut la tension de seuil U_s, c'est-à-dire la hauteur de la barrière de potentiel à franchir par les porteurs mobiles circulant dans la jonction parcourue par un courant ?

EX 14 – Mer de Lidenbrock[5]

On considère la terre de rayon R et de centre O ayant une masse considérée comme uniformément répartie en volume. A l'intérieur se trouve une cavité sphérique de rayon R' et de centre O'.

1. En utilisant le principe de superposition, déterminer le champ de gravitation à l'intérieur de la cavité.
2. Si la cavité était partiellement remplie d'eau, et que l'on puisse négliger l'effet gravitationnel de cette eau, quelle serait la forme de sa surface libre ?

EX 15 – Condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique est constitué par deux armatures métalliques cylindriques coaxiales, d'axe Oz, de rayons R_1 et R_2 et de hauteur h. On rappelle que dans un conducteur en électrostatique, le champ électrostatique est nul, est donc la surface du conducteur est équipotentielle et les charges sont surfaciques, de valeurs opposées Q et $-Q$ sur les deux armatures de façon à respecter la neutralité globale[6]. Il n'y a aucune accumulation de charge entre les armatures, espace occupé par un diélectrique de permittivité relative ε_r. On négligera les effets de bords en s'appuyant sur le fait que $R_2 - R_1 \ll R_1 < R_2 < h$: le condensateur sera supposé infini selon Oz.

1. Établir l'expression du champ et du potentiel dans tout l'espace.
2. Calculer la capacité C de ce condensateur.

EX 16 – Champ au voisinage d'un axe de révolution

On considère un disque chargé uniformément d'axe Oz et de rayon R. On note $E(z)$ le champ sur l'axe. On cherche des renseignements sur le champ en un point M situé hors de l'axe et repéré en coordonnées cylindriques.

1. Donner la forme générale du champ $\vec{E}(M)$ (composantes et variables) en tenant compte des symétries de la distribution.
2. On se place à une distance r de l'axe petite devant la distance caractéristique de variation du champ (donc devant R). En choisissant une surface de Gauss adéquate, montrer que la composante radiale est donnée par $E_r = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z}$.
3. Déterminer le signe de E_r puis esquisser la forme des lignes de champ au voisinage de l'axe Oz.

EX 17 – Lévitation d'une charge

On dispose d'un anneau d'axe Oz vertical de rayon a et portant une charge totale Q. Sur l'axe une particule de charge q, masse m peut se déplacer. Elle est initialement en $z = 2a$ et lâchée sans vitesse initiale. Après avoir calculé le champ $\vec{E}(M)$ pour M sur l'axe Oz par un calcul direct (c'est-à-dire intégral), déterminer une condition pour qu'il y ait oscillation.

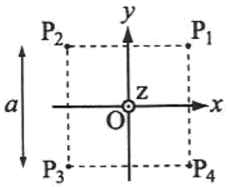
4. Modèle planétaire d'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles, le noyau étant fixe, et l'orbite circulaire. Bohr ajoute une hypothèse de quantification (modèle semi-quantique) des orbites avec $n \in \mathbb{N}$ basée sur la dualité onde-corpuscule de l'électron. Le mode fondamental correspond à $n = 1$. Cette quantification n'est pas utile ici.

5. Personnage du roman "Voyage au centre de la Terre", de Jules Verne.

6. On peut montrer que cette description reste valable dans le cadre de l'ARQS pour un bon conducteur.

EX 18 – Champ lointain créé par un ensemble de quatre charges

On considère une distribution de quatre charges ponctuelles de même valeur absolue q, situées aux sommets P_1, P_2, P_3 et P_4 d'un carré de côté a et de centre l'origine O du repère. Le carré est placé dans le plan Oxy, avec les sommets sur les bissectrices (cf ci-contre).



Exprimer le potentiel et le champ électrostatiques lointains (au premier ordre utile en $\frac{a}{r}$ avec $r = OM$), dans les quatre configurations suivantes où les charges occupant respectivement les points P_1, P_2, P_3 et P_4 sont :

a) $q, q, q, q,$ b) $-q, q, q, q,$ c) $-q, -q, q, q,$ d) $-q, q, -q, q$.

On pourra s'appuyer, le cas échéant, sur les expressions trouvées en cours pour le dipôle.

EX 19 – Zones attractives et répulsives d'une interaction dipôle-dipôle

On considère un dipôle électrostatique rigide de moment dipolaire $\vec{p} = p\vec{u}_z$ ($p > 0$) placé en l'origine O du repère. On rappelle l'expression du champ créé par le dipôle dans la base et les coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta\right)$$

1. Rappeler en quoi cette expression satisfait aux propriétés de symétrie de la distribution de charge, qui est assimilée à deux charges ponctuelles opposées placées symétriquement de part et d'autre de O selon Oz.
2. Exprimer le champ créé en un point M de Oz et en un point N du plan Oxy situés à la même distance r de O, en fonction de r et de $\vec{p}$. Quelle relation y a-t-il entre ces deux champs ?
3. Déterminer le lieu géométrique des points où le champ est perpendiculaire à $\vec{p}$.
4. On considère un second dipôle rigide de moment $\vec{p} = p\vec{u}_z$ situé en M, libre de se translater mais pas de changer d'orientation. Montrer par un raisonnement énergétique que l'interaction entre les deux dipôles peut être soit attractive soit répulsive selon la position M. Délimiter spatialement les régions associées.

EX 20 – Interaction fil - dipôle

On place un dipôle à une distance a d'un fil rectiligne chargé de grande longueur, de densité linéïque de charge λ. Le dipôle est maintenu selon la direction orthoradiale. Après avoir calculé le champ créé par le fil, déterminer la force qu'il subit par un calcul direct puis en passant par l'énergie.

EX 21 – Interaction dipôle - dipôle induit

En O se trouve un dipôle $\vec{p}_1 = p\vec{e}_x$ qui crée un champ $\vec{E}$ dans tout l'espace. En $A(x = r_0, 0, 0)$ se trouve une molécule polarisable, qui acquiert un moment dipolaire induit $\vec{p}_i = \alpha\varepsilon_0\vec{E}(A)$. Déterminer la force subie par cette molécule.

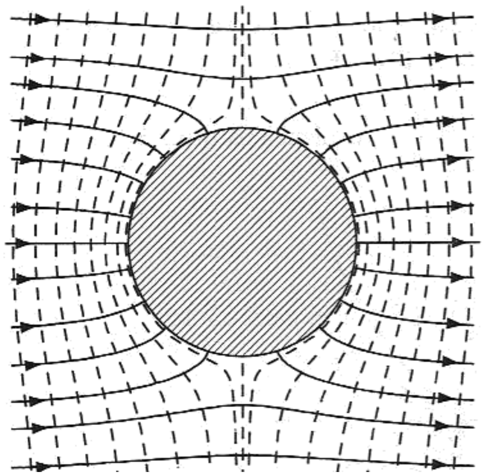
EX 22 – Polarisation d'une boule conductrice

On superpose un champ électrique uniforme $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_z$ et le champ d'un dipôle de moment $\vec{p} = p\vec{u}_z$ placé en l'origine O du repère. On rappelle le potentiel créé par le dipôle en M :

$$V_d(M) = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

1. Écrire le potentiel électrostatique total $V(M)$. À quelle condition sur p le champ résultant présente-t-il une équipotentielle sphérique de centre O et de rayon R ?

On considère maintenant une boule conductrice globalement neutre de rayon R placée dans un champ extérieur $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z$. La boule se polarise (les charges mobiles se déplacent), et acquiert une densité surfacique de charge $\sigma(P)$ de sorte que le champ résultant à l'intérieur reste nul à l'équilibre, et sa surface est une équipotentielle (de valeur V_0). On peut alors montrer que le champ à l'extérieur de la boule est rigoureusement équivalent à celui étudié dans la question précédente [a]. La carte des lignes de champ et équipotentielles est donnée ci-contre.



[a] La boule polarisée peut ainsi être formellement remplacée par le dipôle pour $r > R$. Cela est du au fait que les conditions aux limites à l'infini (champ $\vec{E} \underset{r\to\infty}{\to} \vec{E}_0$) et sur la boule ($V \underset{r\to R}{\to} V_0$) sont les mêmes pour l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, conditions qui garantissent l'unicité de la solution.

2. Que peut-on dire du potentiel sur le plan Oxy ? Cela est-il en accord avec la symétrie de la distribution de charges ?
3. En appliquant le théorème de Gauss très près de la surface et en assimilant la surface à un plan infini chargé, retrouver le théorème de Coulomb pour un conducteur à l'équilibre donnant le champ à l'extérieur au voisinage de la surface en fonction de σ et de la normale sortante $\vec{n}$: $\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$.
4. En déduire l'expression de σ en fonction de θ l'angle des coordonnées sphériques. Que vaut la charge totale Q portée par l'hémisphère $z > 0$?
5. Calculer le moment dipolaire $\vec{p}$ associé à cette distribution surfacique de charges, en commençant rechercher la position des barycentres P et N respectivement des charges positives et négatives. Que retrouve-t-on ?