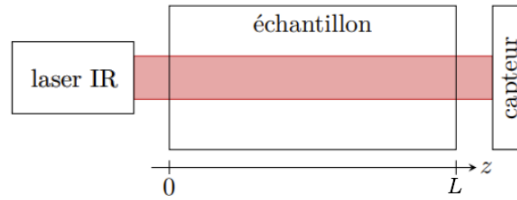


LASER

EX 1 – Mesure de la concentration en CO₂ dans l'atmosphère

Le développement de modèles climatiques et l'actualisation de leurs prédictions nécessite des mesures précises de la fraction molaire en CO₂ présent dans l'atmosphère. Celle-ci est usuellement exprimée en parties par millions (ppm) : une fraction molaire de 413 ppm indique par exemple qu'un million de molécules d'air contient en moyenne 413 molécules de CO₂. Pour ce faire, un échantillon d'air est prélevé, de préférence en relative altitude, loin de toute perturbation humaine et végétale, puis refroidi pour condenser toute la vapeur d'eau, avant d'être analysé.

Le principe est celui de la spectrophotométrie : un faisceau laser de longueur d'onde $4,26 \mu\text{m}$, à laquelle le spectre d'absorption du CO₂ présente un maximum, traverse un échantillon de longueur connue. Comparer les intensités lumineuses avant et après traversée de l'échantillon permet d'en déduire la concentration en CO₂, en nombre de molécules par m³ d'air.



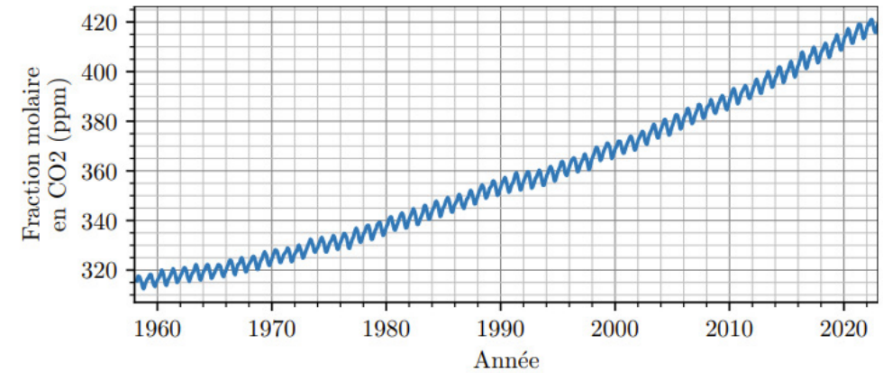
Les capteurs de CO₂ popularisés comme indicateurs de la qualité de l'air lors de la crise du Covid-19, fonctionnent sur le même principe, mais avec des exigences de précision bien moindre.

1. On modélise le faisceau laser par un cylindre de section S au sein duquel se propage une onde plane progressive monochromatique de polarisation rectiligne selon $\vec{e}_x$. Écrire le champ électrique, le champ magnétique et le vecteur de Poynting de l'onde.
2. Les capteurs utilisés sont sensibles à l'intensité du faisceau, définie comme une double moyenne spatiale et temporelle du vecteur de Poynting sur toute la section S du faisceau. Relier I à l'amplitude du champ électrique de l'onde.
3. Chaque molécule de CO₂ se trouvant dans le faisceau absorbe en moyenne une puissance p proportionnelle à l'intensité : $p = \sigma I$, où σ est une constante homogène à une surface appelée *section efficace d'absorption* tabulée dépendant uniquement de la longueur d'onde et de l'atome. En raisonnant sur une tranche infinitésimale du faisceau, montrer qu'en régime stationnaire l'intensité vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dI}{dz}(z) + n\sigma I(z) = 0$$

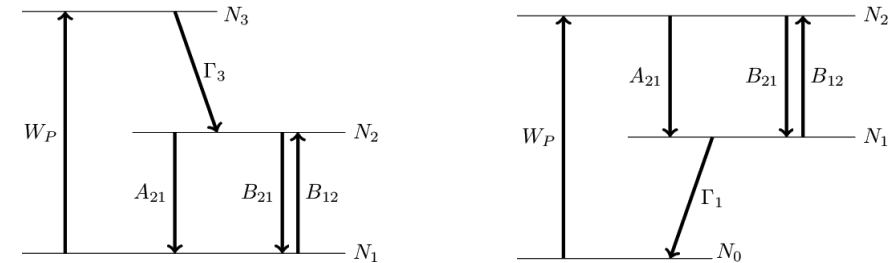
où n est la densité volumique de CO₂, c'est-à-dire le nombre de molécules de CO₂ par unité de volume dans l'échantillon.

4. On appelle absorbance de l'échantillon le rapport $A = \ln\left(\frac{I(0)}{I(z)}\right)$. Montrer que la connaissance de l'absorbance permet de remonter à n , nombre de molécules de CO₂ par unité de volume.
5. En pratique, on procède à température et pression parfaitement contrôlées et par comparaison avec des échantillons étalons de concentration connues. Expliquer ces choix expérimentaux.
6. La figure ci-dessous représente l'évolution temporelle de la fraction molaire en CO₂ (en moyenne mensuelle) mesurée à l'observatoire situé au sommet du volcan de Mauna Loa, à Hawaï. Proposer une interprétation aux tendances observées.



EX 2 – Inversion de population dans des lasers à 3 niveaux

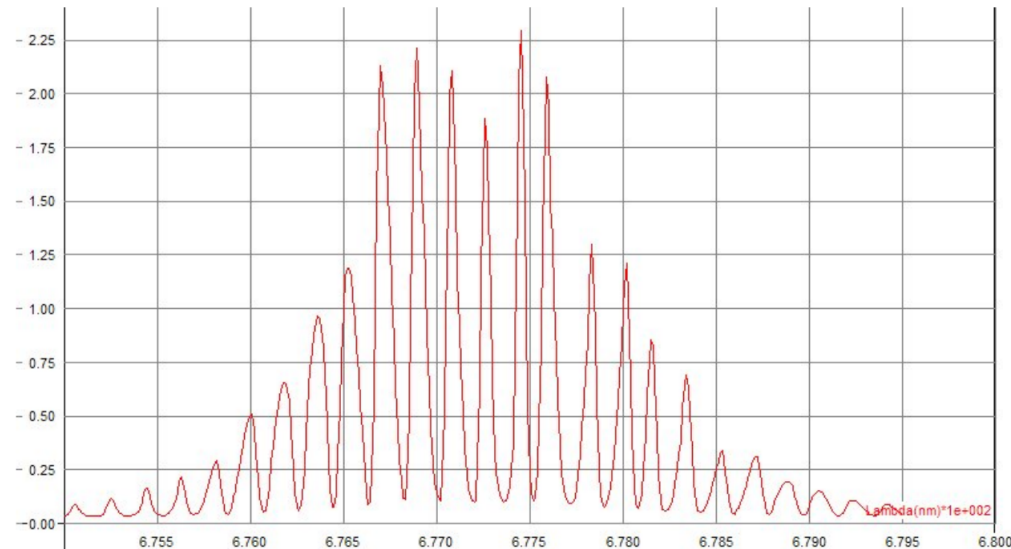
Le schéma des niveaux E_1 , E_2 et E_3 et des transitions d'un laser à 3 niveaux non dégénérés est donné ci-dessous (gauche). On note $u_{em}(\nu_0)$ la densité volumique d'énergie dans le milieu à la fréquence ν_0 telle que $h\nu_0 = E_2 - E_1$. Le coefficient de pompage W_p est une probabilité de transition par unité de temps, de même pour le coefficient Γ_3 . La transition $3 \rightarrow 1$ est de probabilité négligeable.



1. Écrire les équations d'évolution de chacun des niveaux.
2. Exprimer une relation entre $\Delta N = N_2 - N_1$ et N_3 en régime stationnaire. En déduire une condition pour l'inversion de population.
3. Renouveler l'étude pour le second type de laser (schéma de droite).

EX 3 – Étude d'une diode LASER

On utilise un spectromètre (résolution maximale 0,02 nm) pour analyser une diode-laser DL à cavité Fabry-Pérot. Voici le spectre obtenu entre 675 nm et 680 nm (en abscisse les valeurs indiquées sous l'axe sont en centaines de nm). Déterminer :



- La longueur moyenne d'émission λ_0 , la fréquence moyenne d'émission ν_0 .
- L'intervalle spectral entre modes résonnant en fréquence $\Delta\nu$ (ou *Intervalle Spectral Libre*) et en longueur d'onde $\Delta\lambda$.
- La largeur spectrale à mi-hauteur de l'ensemble des modes $\Delta\nu_0$ et la longueur de cohérence associée ℓ_c .
- La longueur L de la cavité de la diode-laser, sachant que l'indice vaut $n = 3,6$.

EX 4 – Temps de présence d'un photon dans une cavité laser

Un laser est constitué d'une cavité optique formée de deux miroirs distants d'une longueur L , se faisant face et entre lesquels est inséré un milieu amplificateur de lumière. Le miroir arrière est parfaitement réfléchissant alors que le miroir avant est légèrement transparent, de coefficient de transmission en intensité $T \ll 1$. À l'intérieur de la cavité s'établit un courant de photons se propageant uniquement selon l'axe optique et dans les deux sens. En régime stationnaire, le flux de photons sortant est compensé par la création de nouveaux photons par le milieu amplificateur. Le milieu actif est supposé suffisamment dilué pour que la vitesse du photon soit assimilée à la vitesse de la lumière dans le vide c .

1. Relier la probabilité qu'un photon de sortir par le miroir avant au coefficient T .

2. En déduire l'expression du temps de présence d'un photon dans la cavité en régime stationnaire, c'est à dire le temps moyen entre sa création et le moment où il sort de la cavité par le miroir avant (aussi appelé *temps de vie*).
3. Pour un tube laser Hélium-Néon de longueur $L = 20$ cm émettant une puissance $P = 10$ mW à la longueur d'onde $\lambda = 632,8$ nm et ayant une transmission de 5%, donner la valeur de la puissance intra-cavité P_{in} et le temps de présence d'un photon dans la cavité.

EX 5 – Nombre de modes d'un laser He-Ne

On dispose d'un laser Hélium-Néon émettant à 632,8 nm. La cavité linéaire a une longueur de 30 cm. Le milieu amplificateur possède une bande spectrale d'amplification supposée rectangulaire pour simplifier, de largeur $\delta\nu = 1,275$ GHz. Les coefficients de réflexion en énergie des miroirs sont $R_1 = 0,99$ et $R_2 = 0,95$.

1. Quel est l'écart en fréquence $\Delta\nu_{ISL}$ entre deux modes longitudinaux résonnant consécutifs, aussi appelé *Intervalle Spectral Libre* (ISL), et l'écart en longueur d'onde $\Delta\lambda_{ISL}$ associé ?
2. Estimer le nombre de modes oscillant (c'est-à-dire effectivement émis) du laser.
3. La finesse de chaque mode résonnant, dont le pic est de largeur notée $\Delta\nu$, vérifie

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta\nu_{ISL}}{\Delta\nu} = \frac{\pi(R_1 R_2)^{1/4}}{1 - (R_1 R_2)^{1/2}}$$

Évaluer $\mathcal{F}$ et commenter.

4. On prend en compte les fluctuations de la longueur de la cavité dues aux fluctuations thermiques. À partir de quelle variation relative de longueur peut-on considérer que les modes résonnant se sont déplacés de un ISL ? Commenter.

EX 6 – Calculs divers autour d'un faisceau gaussien

1. Un laser possède les caractéristiques suivantes : $\lambda = 632,8$ nm ; $w_0 = 0,60$ mm.
 - a) Calculer le demi-angle d'ouverture θ du faisceau et la distance de Rayleigh z_R du laser.
 - b) 10 mm après le col objet, le diamètre du faisceau a toujours pour valeur $2w_0$. Justifier.
2. On cherche à focaliser un faisceau laser collimaté, issu d'un laser He-Ne ($\lambda = 633$ nm), de taille $w = 1$ mm, situé à une position $z = 0$ de telle façon que la longueur de Rayleigh du faisceau focalisé soit égale à 30 mm. Quelle distance focale doit posséder la lentille qu'il faut utiliser ?
3. Soit un faisceau gaussien de rayon w . Calculer le pourcentage de l'énergie de ce faisceau transmis à travers un diaphragme circulaire de rayon ρ , centré sur le faisceau. AN : $\rho = 0,5w$; $\rho = 0,75w$; $\rho = w$ et $\rho = 2w$.

EX 7 – Laser à modes bloqués (ou phases bloquées)

On considère une cavité laser et on note $L = 3,0\text{ m}$ la longueur d'un aller et retour dans la cavité.

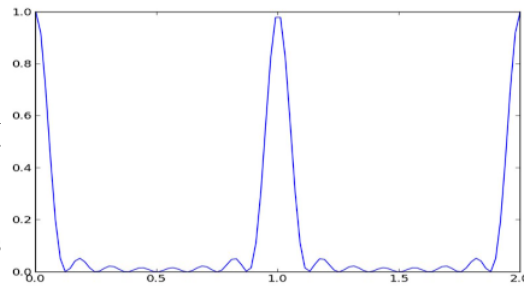
1. Montrer que les fréquences possibles (les modes résonnants) forment un « peigne » d'écart $\Delta\nu$ dont on donnera la valeur.
2. On suppose d'abord que seulement deux modes sont présents, ν_1 et $\nu_2 = \nu + \Delta\nu$. Avec peu de calculs décrire le signal délivré par un photodétecteur illuminé par le faisceau laser, dans le cas où celui-ci serait constitué soit d'une photodiode rapide de temps de réponse 1 ns, soit dans le cas d'une photorésistance de temps de réponse 10 ms.

Pour la suite, le laser est multimode, avec N modes effectivement émis, dont les longueurs d'onde s'échelonnent entre 650 et 950 nm.

3. Calculer N .
4. Grâce à un dispositif non décrit ici, on impose à tous les modes d'être en phase en un point P de la cavité à l'instant $t = 0$. On suppose que tous les modes ont même amplitude. Justifier qu'en P le champ (scalaire) s'écrit

$$\underline{s}(t) = \underline{A} e^{i2\pi\nu_m t} \sum_{p=1}^N e^{i2\pi(p-1)\Delta\nu t}$$

5. L'allure de l'intensité en fonction du temps est représentée ci-contre (pour $N = 8$). Déterminer les temps t_n pour lesquels l'intensité est maximale. Déterminer la largeur des impulsions temporelles (à la base).



EX 8 – Corps noir : loi de Planck, loi de Wien et formule de Stefan

On modélise un gaz de photons en équilibre thermique par les modes propres d'une cavité parallélépipédique vide d'arêtes L_x , L_y et L_z , au parois en métal parfait. Ces modes prennent la forme d'ondes stationnaires de pulsation ω , soit pour le champ électrique

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_z = E_{0z} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t) \end{cases}$$

On se limite à $(k_x, k_y, k_z) \in \mathbb{R}^{+3}$ car cette solution est faite de la superposition d'ondes planes se propageant en sens contraire, donc les signes négatifs sont déjà pris en compte.

1. Vérifier que cette solution vérifie l'équation de D'Alembert dans le vide, et que si on note $\vec{E}_0 = E_{0x}\vec{u}_x + E_{0y}\vec{u}_y + E_{0z}\vec{u}_z$ et $\vec{k} = k_x\vec{u}_x + k_y\vec{u}_y + k_z\vec{u}_z$, on a nécessairement

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = E_{0x}k_x + E_{0y}k_y + E_{0z}k_z = 0 \quad \text{et} \quad \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Montrer que pour respecter les conditions aux limites, chaque mode propre doit vérifier :

$$\exists(n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{N}^3, \vec{k} = \pi \left(\frac{n_x}{L_x} \vec{u}_x + \frac{n_y}{L_y} \vec{u}_y + \frac{n_z}{L_z} \vec{u}_z \right)$$

(0, 0, 0) étant exclu. Dans la suite on considère donc que pour tout (n_x, n_y, n_z) il existe deux modes propres indépendants, correspondant chacun à une polarisation rectiligne orthogonale à $\vec{k}$ et à celle de l'autre mode¹.

2. En supposant que les dimensions de la cavité sont très grandes devant la plupart des longueurs d'onde mises en jeu, montrer que le nombre dn_ν par unité de volume de modes propres contenus entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$ est

$$dn_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu.$$

On pourra raisonner sur une sphère dans l'espace des vecteurs $\vec{k}$. On admet par la suite que ce résultat est indépendant de la cavité.

3. D'après l'hypothèse de Planck, chaque mode propre peut être vu comme analogue à un oscillateur harmonique mécanique de fréquence propre ν dont l'énergie ne peut prendre que les valeurs quantifiées $E_n = nh\nu$ avec $n \in \mathbb{N}$, associées à une probabilité vérifiant la statistique de Maxwell-Boltzmann à l'équilibre thermique :

$$P(E_n) = A e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$$

En déduire que l'énergie moyenne d'un mode propre de fréquence ν vérifie

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

4. En déduire la LOI DE PLANCK donnant la densité spectrale volumique d'énergie en fréquence $u_\nu(\nu, T)$, puis celle en longueur d'onde $u_\lambda(\lambda, T)$.
5. Retrouver la LOI DE WIEN indiquant que la position du maximum de cette vérifie

$$\lambda_m T = \text{constante} = 2898 \mu\text{m.K}$$

Représenter l'allure de $u_\lambda(\lambda, T)$ en fonction de λ pour plusieurs températures de plus en plus grandes.

6. Établir l'expression de la densité volumique totale d'énergie du rayonnement à l'équilibre thermique, aussi appelée FORMULE DE STEFAN²

$$u = \sigma^* T^4$$

où σ^* est une constante dont on donnera l'expression et la valeur numérique.

On donne

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

1. Le plan de polarisation constitue un espace vectoriel de dimension 2.
2. De cette loi on tire la loi de Stefan-Boltzmann pour la puissance surfacique, utilisée dans le cours de thermodynamique sur le rayonnement thermique, après intégration du flux émis selon toutes les directions d'émission dans un hémisphère.