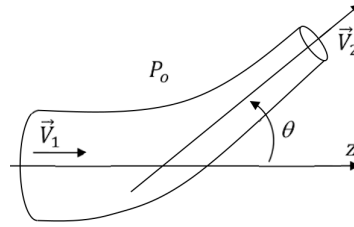


Bilans macroscopiques

EX 1 – Conduite coudée à section variable

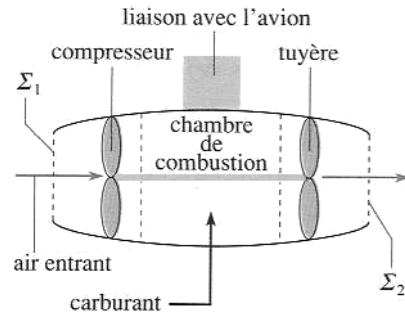
On considère une portion de conduite coudée, de section progressivement variable, parcourue par un fluide parfait et placée dans une atmosphère de pression P_0 . L'écoulement est supposé incompressible et homogène de masse volumique μ , et stationnaire. On néglige les effets de la pesanteur. On note S_1 et S_2 l'aire des sections d'entrée et de sortie, P_1 et P_2 la pression moyenne du fluide et $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sa vitesse moyenne sur ces sections.



1. Par un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force exercée par le fluide sur la conduite en fonction des données utiles.
2. En déduire la force que doit exercer un opérateur pour maintenir la conduite fixe.

EX 2 – Poussée d'un turboréacteur

Un avion de vitesse $\vec{v}_a = -v_1 \vec{u}_x$ par rapport à l'air ambiant (de pression P_0) est équipé d'un turboréacteur^a de sections d'entrée Σ_1 d'aire S_1 et de sortie Σ_2 d'aire S_2 . On note $\vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_x$ la vitesse d'éjection des gaz par rapport à l'avion, et D_m le débit d'air entrant. Le carburant est du kérosène, supposé exclusivement constitué de dodécane $C_{12}H_{26}$ ($M = 170 \text{ g.mol}^{-1}$).



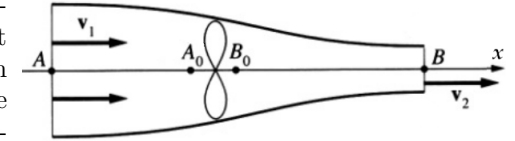
^a. On pourra rapprocher cet exercice de celui de la feuille de Thermodynamique.

1. Le débit massique de kérosène D_{mk} est fixé à la moitié du débit maximal utile, c'est-à-dire celui qui correspondrait à une combustion totale dans les conditions stœchiométriques. En déduire la valeur de α telle que $D_{mk} = \alpha D_m$.
2. En supposant l'avion en mouvement rectiligne uniforme, exprimer la force $\vec{F}_g$ exercée par les gaz en circulation dans le turboréacteur sur ce dernier. En déduire la force de poussée $\vec{F}_p$ totale transmise à l'avion par le turboréacteur. Ce calcul est-il pertinent si l'avion est en fait en phase d'accélération? Justifier.
3. Montrer que pour une vitesse d'éjection v_2 fixée, il existe une vitesse optimale pour la poussée. Qu'en est-il pour la puissance de cette force?
4. On donne $S_1 = 1 \text{ m}^2$ et $v_2 = 800 \text{ m.s}^{-1}$. Évaluer la poussée et la consommation en carburant si l'avion se déplace à 300 m.s^{-1} à une altitude de 10 km.

EX 3 – Modèle d'écoulement autour d'une hélice

Une hélice, supposée immobile, est plongée dans un fluide en écoulement incompressible et stationnaire de masse volumique μ . À l'exception de la zone située au voisinage immédiat de l'hélice où l'écoulement est turbulent (entre A_0 et B_0), l'écoulement est supposé parfait unidimensionnel orthogonal au plan de l'hélice. On néglige toute variation transverse ainsi que l'effet de la pesanteur.

L'écoulement est délimité par un tube de courant de section progressivement variable, tout autour duquel la pression est uniforme égale à P_0 . L'aire de la section évolue de S_1 en entrée (A) à S_2 en sortie (B) en passant par S entre A_0 et B_0 (imposée par la taille de l'hélice).



Les vitesses sont notées $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_x$ en entrée, $\vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_x$ en sortie, $\vec{v}_-$ en A_0 et $\vec{v}_+$ en B_0 . De même les pressions sont notées P_1, P_2, P_- et P_+ , avec $P_1 = P_2 = P_0$.

1. Montrer que si la zone turbulente $[A_0 B_0]$ est très fine, on peut considérer $\vec{v}_- = \vec{v}_+$ (notée $v \vec{u}_x$). Quelle relation existe entre les trois vitesses?
2. Par un bilan de quantité de mouvement entre les sections en A et en B, établir l'expression de la force $\vec{F}$ exercée par l'hélice sur le fluide en écoulement.
3. Établir une autre expression de $\vec{F}$ en raisonnant sur la zone $[A_0 B_0]$ de l'hélice. En déduire l'expression de v en fonction de v_1 et v_2 uniquement, en appliquant le théorème de Bernoulli.
Dans la suite on prend pour seules variables v_1 et v , v_2 étant éliminée des équations en tant que grandeurs de sortie.
4. Par un bilan d'énergie, déterminer la puissance $\mathcal{P}$ fournie par l'hélice au fluide en fonction de v_1 et v , et des constantes nécessaires.
5. Dans ne nombreux cas (navire, hélicoptère, avion...) l'hélice est liée à un objet en translation. Comment sont modifiés les résultats précédents?
6. Dans cette question on se place dans le cas d'un hélicoptère de masse $M = 2t$, au décollage donc avec $v_1 = 0$. Exprimer $\mathcal{P}$ en fonction de F , puis calculer la puissance minimale nécessaire à son décollage si son hélice fait 5 m de diamètre.
7. Comment pourrait-on adapter ce modèle pour étudier le cas d'une éolienne? Représenter les graphes de la force exercée par le fluide $F_f(u)$ et de sa puissance $\mathcal{P}_f(u)$, en fonction de $u = \frac{v}{v_1}$. Définir alors le rendement¹ r de l'éolienne, puis trouver sa valeur maximale et les conditions pour l'obtenir.

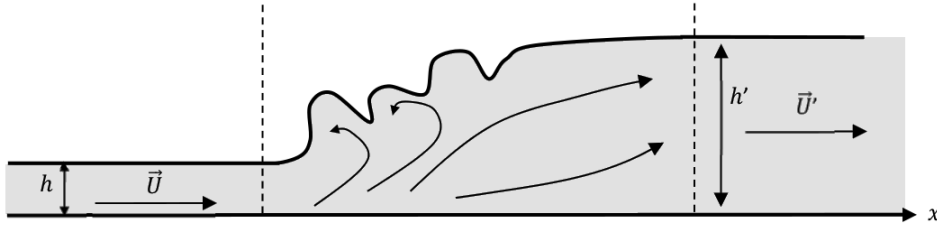
EX 4 – Ressaut hydraulique

Au fond d'un évier, le jet d'eau produit un bourrelet d'eau turbulent de forme circulaire appelé ressaut, qui sépare une zone où l'épaisseur du fluide est faible, d'une région où

1. Il s'agit ici d'un rendement de conversion mécanique, sachant que l'on ne modélise pas la conversion électro-mécanique qui s'ensuit dans l'éolienne et sa charge.

la hauteur du fluide est plus importante. On caractérise qualitativement l'existence de cette transition brutale par le *nombre de Froude* Fr , rapport de la vitesse du fluide et de celle des ondes de surface ou ondes de gravité, qui vaut $c = \sqrt{gh}$ pour un fluide peu profond d'épaisseur h , dans le champ de pesanteur g .

Le ressaut étudié est schématisé ci-dessous, dans une géométrie unidimensionnelle propre à un canal de largeur ℓ . On assimile les deux zones de part et d'autre à des écoulements stationnaires incompressibles et homogènes de masse volumique μ unidimensionnels, de vitesse $\vec{U} = U\vec{u}_x$ et $\vec{U}' = U'\vec{u}_x$ respectivement.



1. Montrer que de part et d'autre du ressaut, le champ de pression est analogue à celui d'un équilibre hydrostatique.
2. En déduire, par un bilan de quantité de mouvement, que

$$U'^2 h' - U^2 h + \frac{g}{2} (h'^2 - h^2) = 0$$

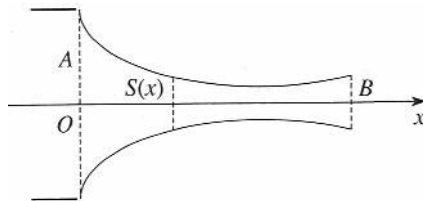
3. En exploitant l'incompressibilité, en déduire l'expression de chaque vitesse en fonction de h et h' . Montrer que Fr passe nécessairement d'une valeur sur-critique à sous-critique. Connaissez-vous un phénomène analogue ?
4. Par un bilan énergétique, déterminer la puissance dissipée dans les remous au niveau du ressaut. Le théorème de Bernoulli est-il valable à la traversée du ressaut ?

Ce phénomène peut se produire aussi suite à l'accélération due au franchissement d'un obstacle dans un cours d'eau, mais aussi dans l'atmosphère au passage d'une crête montagneuse, engendrant des courants ascendant localisés et les météores associés.

EX 5 – Écoulement d'un fluide compressible dans une tuyère

On considère l'écoulement stationnaire et adiabatique d'un gaz dans une tuyère d'axe (Ox) dont la section $S(x)$ varie suffisamment progressivement pour adopter un modèle unidimensionnel. Dans une section droite d'abscisse x , les grandeurs d'état sont supposées de ne dépendre que de x : pression $P(x)$, température $T(x)$, masse volumique $\rho(x)$ et vitesse $v(x)\vec{u}_x$ (avec $v(x) > 0$).

Le gaz est supposé parfait, de coefficient adiabatique γ et de masse molaire M , et on néglige les frottements visqueux et le poids. Les grandeurs en entrée de tuyère ($x = 0$) sont supposées connues, et indicées par 0.



1. Établir une relation entre $T(x)$ et $v(x)$.
2. Malgré les vitesses importantes, on suppose l'évolution isentropique (écoulement parfait). Quelle relation peut-on en tirer entre $T(x)$ et $\rho(x)$?
3. En exploitant la stationnarité de l'écoulement et les relations précédentes, établir la relation dite de *Rankine-Hugoniot* :

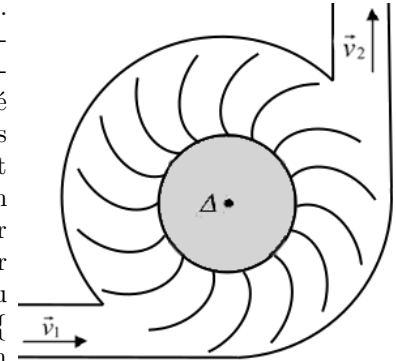
$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} + (1 - \mathcal{M}^2) \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{M} = \frac{v}{c}$$

le *nombre de Mach*, et $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ la célérité des ondes sonores dans le gaz.

4. Selon que $\mathcal{M} < 1$ ou $\mathcal{M} > 1$, prévoir le sens d'évolution de $v(x)$ selon la position dans la tuyère. Comparer avec le cas d'un fluide en écoulement incompressible.
5. Dans un turboréacteur d'avion, la tuyère constitue la partie terminale, après la turbine. On souhaite produire une vitesse d'éjection supersonique la plus grande possible en sortie de tuyère. La forme représentée ci-dessus est-elle adaptée ? Pourquoi ? Si oui quelle est la contrainte à respecter au mieux ?

EX 6 – Étude d'une turbine à eau

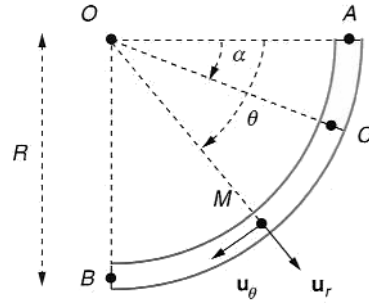
Une turbine à augets est entraînée par un jet d'eau incident de débit massique D_m et de vitesse $\vec{v}_1$ constants. Elle tourne autour de son axe fixe Δ à la vitesse angulaire ω . La vitesse $\vec{v}_2$ du jet émergent dépend de l'interaction entre le jet et la turbine, le tout étant englobé par le carter. Pour simplifier on suppose les deux jets unidimensionnels et d'épaisseur négligeable, entrant et sortant tangentiellement à un cercle d'axe Δ et de rayon a . Le rotor entraîné par la turbine et les frottements sur l'axe Δ exercent un couple global résistant de valeur absolue Γ , qui sera supposé constant et indépendant du régime. On note J le moment d'inertie de l'ensemble { turbine + rotor }, supposé pratiquement inchangé en présence d'eau dans la turbine. On néglige la pesanteur.



1. À l'aide d'un bilan de moment cinétique, établir une première relation entre $\omega(t)$ et les données du problème. Puis faire de même via un bilan énergétique.
2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par ω , forcée par les paramètres v_1 et Γ . Exprimer ω_p , la valeur de ω en régime permanent. Cette équation est-elle valable pour toutes les valeurs de Γ ? Que se passe-t-il si Γ est trop grand ?
3. Exprimer la puissance mécanique $\mathcal{P}$ fournie par la turbine en régime permanent. Pour quelle valeur de Γ (et de ω_p), v_1 étant imposée, cette puissance est-elle maximale ? Que vaut alors v_2 ?
4. On règle Γ pour que $\mathcal{P}$ soit maximale, la turbine étant initialement à l'arrêt. Déterminer $\omega(t)$ et le temps caractéristique associé.

EX 7 – Vidange d'un tuyau

Un tuyau fixe a la forme d'un quart de tore de centre O , de rayon R et de section de rayon $a \ll R$. Il est rempli d'eau de masse volumique μ . À l'instant $t = 0$, on enlève les bouchons situés à ses extrémités A et B et l'eau coule. À l'instant t , on repère le niveau de la surface libre par l'angle $\alpha(t)$ que fait le vecteur $\overrightarrow{OC}$ avec l'horizontale, où C est le centre de la surface libre. Un point M quelconque étant repéré par ses coordonnées cylindriques ($r \approx R, \theta, z \approx 0$), on suppose que le champ de vitesse est de la forme $\vec{v} = v(\theta, t)\vec{u}_\theta$.



1. Montrer que $v(\theta, t)$ ne dépend pas de θ et exprimer v en fonction de R et $\dot{\alpha}$.
2. En faisant un bilan énergétique entre t et $t + dt$, montrer que α vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{g}{R} \left(\frac{1 - \sin\alpha}{\pi/2 - \alpha} \right)$$

3. En déduire l'expression d'un temps caractéristique de vidange du tuyau. Proposer un programme de résolution numérique de cette équation différentielle en PYTHON.