

Cinématique des fluides

EX 1 – Écoulement dans un dièdre droit

Un fluide s'écoule dans un espace délimité par deux parois planes orthogonales (dièdre droit). Le champ des vitesses est défini par

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -kx\vec{u}_x + ky\vec{u}_y \text{ pour } x > 0 \text{ et } y > 0.$$

1. Déterminer le champ des accélérations avec le formalisme lagrangien puis avec le formalisme eulérien.
2. Est-il irrotationnel? Si oui déterminer le potentiel des vitesses.
3. L'écoulement est-il incompressible? Montrer qu'il y a une fonction courant ψ telle que $\vec{v} = \text{rot}(\psi\vec{u}_z)$, et l'expliciter. Montrer qu'une ligne de courant correspond à $\psi = \text{constante}$ ¹ (ligne iso- ψ).
4. Déterminer l'équation des lignes de courant. Les représenter.
5. Déterminer les trajectoires des particules fluides.

EX 2 – Effet de peau dans un fluide visqueux

L'écoulement d'un fluide supporté par un plan horizontal ($y = 0$) oscillant horizontalement est décrit par le champ eulérien des vitesses suivant :

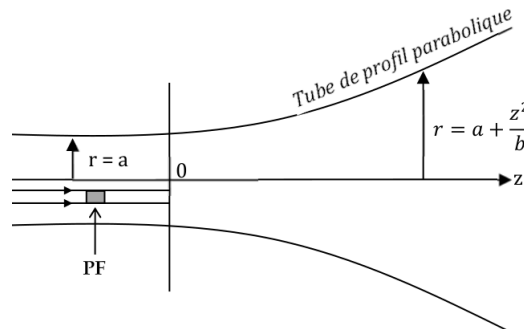
$$\vec{v}(\vec{r}, t) = a e^{-ky} \cdot \cos(\omega t - ky) \vec{e}_x$$

1. Ce champ correspond-il à un écoulement stationnaire? Préciser la nature des lignes de courant et des trajectoires.
2. Cet écoulement est-il incompressible? Est-il le siège de tourbillons? Existe-t-il un potentiel φ des vitesses tel que $\vec{v} = \text{grad} \varphi$? Si oui le définir.

EX 3 – Écoulement dans un tube parabolique

Un fluide est en écoulement incompressible stationnaire dans un tube de profil d'abord cylindrique puis parabolique, d'axe de symétrie de révolution (Oz). Les lignes de courant ont pour équation

$$\begin{cases} z < 0 : r = \lambda a \\ z > 0 : r = \lambda \left(a + \frac{z^2}{b} \right) \\ \theta = \text{constante} \end{cases}$$



La composante axiale v_z de la vitesse est supposée indépendante de r quelque soit z . On notera v_0 la vitesse en O .

1. ψ s'appelle la *fonction courant*, hors programme.

1. Déterminer le champ de vitesse eulérien $\vec{v}(r, z)$ en tout point.
2. L'écoulement est-il potentiel? Que peut-on en conclure sur le mouvement subit par une particule de fluide?
3. On considère une particule de fluide qui, pour $z < 0$, a la forme représentée sur le schéma ci-contre. Décrire qualitativement l'évolution de cet élément de fluide.

EX 4 – Écoulement de Poiseuille cylindrique

L'écoulement stationnaire d'un liquide visqueux dans une conduite cylindrique d'axe (Oz) et de rayon R peut être décrit par le champ de vitesse à symétrie cylindrique

$$\vec{v}(\vec{r}) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{u}_z \quad (\text{avec } r \leq R).$$

1. L'écoulement est-il incompressible?
2. Déterminer le champ des accélérations. Quelles sont les lignes de courant et les trajectoires particulières?
3. Déterminer le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$. On pourra pour cela s'aider de la propriété suivante : $\text{rot}(f\vec{A}) = \text{grad} f \wedge \vec{A} - f \text{rot} \vec{A}$. Puis vérifier l'analogie du théorème d'Ampère sur un petit rectangle de plan perpendiculaire à $\vec{\Omega}$.

EX 5 – Sphère pulsante

Dans un fluide en écoulement incompressible infiniment étendu, initialement au repos, on place une sphère solide de centre O . Le rayon R de la sphère est variable : $R(t) = R_0 + a \cos(\omega t)$.

1. Déterminer le champ de vitesse. On pourra user d'un argument de symétrie.
2. Calculer le champ d'accélération.
3. Que deviennent ces résultats dans l'approximation des petites oscillations : $a \ll R_0$?

EX 6 – Écoulement entre deux cylindres

Un fluide visqueux remplit, sur une hauteur h , l'espace compris entre deux cylindres coaxiaux C_1 et C_2 , d'axe commun (Oz), de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. Ces cylindres tournent autour de leur axe commun (Oz) avec les vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 . L'écoulement du fluide, entraîné par les deux cylindres en raison des frottements, peut être décrit par le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}) = v_0 \left(A r + \frac{B}{r} \right) \vec{u}_\theta$ où A et B sont des constantes.

1. Déterminer les constantes en exploitant la continuité de champ de vitesse au contact des solides. Que se passe-t-il dans le cas particulier où $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$?
2. L'écoulement est-il incompressible? Est-il tourbillonnaire? Existe-t-il un potentiel de vitesse?

3. Déterminer le champ d'accélération et l'exprimer de façon condensée en fonction de $v = ||\vec{v}||$. Que retrouve-t-on ?

EX 7 – Écoulement dans un lavabo à fond plat

Pour un écoulement plan, un *puits* ou une *source* est un axe par lequel du fluide peut s'écouler pour être éliminé ou injecté. Lorsqu'un lavabo se vide, l'axe vertical passant par la bonde est peut être modélisé comme un puits. Lors de la vidange, il n'est pas rare d'observer des lignes de courant incurvées tourbillonnant autour du puits. On peut modéliser cela simplement par la superposition d'un puits et d'un vortex.

Le fluide est de l'eau, supposée incompressible et homogène. L'écoulement est supposé plan, horizontal, indépendant de la coordonnée de profondeur z , et le puits est sur (Oz) . On note e l'épaisseur d'eau, supposée constante pendant la durée de l'observation, et D le débit volumique d'extraction (> 0). On travaille avec les coordonnées et la base cylindriques.

1. On s'intéresse d'abord au puits seul.
 - a) Montrer que le champ de vitesse qui lui est associé s'écrit $\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \frac{D}{2\pi e r} \vec{u}_r$.
 - b) L'écoulement est-il potentiel ? Si oui trouver le potentiel associé.
 - c) Faire une analogie entre ce champ de vitesse le champ électrique créé par une certaine distribution de charge.
2. On s'intéresse maintenant au vortex seul, de champ de vitesse $\vec{v}_2(\vec{r}, t) = \frac{C}{2\pi r} \vec{u}_\theta$.
 - a) Déterminer l'équation des lignes de courant associées et les représenter.
 - b) L'écoulement est-il incompressible ?
 - c) Calculer la circulation de $\vec{v}$ le long d'un cercle d'axe z et de rayon R , orienté dans le sens trigonométrique. Pouvait-on trouver ce résultat par le théorème de Stokes ?
 - d) Faire une analogie entre ce champ de vitesse et le champ magnétique créé par une certaine distribution de courant.
3. On superpose les deux champs de vitesse, sans introduire de composante selon z car le modèle du puits assure que le fluide disparaît quand il touche l'axe (Oz) .
 - a) Établir l'équation des lignes de courant en coordonnées cylindriques et tracer leur allure.
 - b) La formation des tourbillons lors de la vidange des lavabos est-elle due à la force de Coriolis induite par la rotation propre de la terre ? Justifier en comparant l'accélération de Coriolis à l'accélération advective.

EX 8 – Écoulement autour d'un cylindre

On considère un fluide parfait, en écoulement stationnaire, plan dans (Oxy) , incompressible et irrotationnel autour d'un obstacle cylindrique de rayon R et d'axe (Oz) . Loin de l'obstacle, le fluide est animé d'une vitesse uniforme $\vec{v}_\infty = v_0 \vec{u}_x$. On travaille avec les coordonnées et la base cylindriques.

1. Montrer qu'il existe une fonction ϕ telle que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ et que $\Delta \phi = 0$. Quelles sont les conditions limites satisfaites par le champ de vitesse au contact de l'obstacle ($r = R$) et à l'infini ?
2. Sachant que $\Delta \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$, montrer qu'une solution du type $\phi(r, \theta) = f(r) \cos \theta$ est compatible avec l'équation de Laplace. Chercher $f(r)$ sous la forme Ar^n , et en déduire explicitement les composantes du champ de vitesses compatibles avec les conditions limites.
3. Tracer l'allure des lignes de champ. Y a-t-il des points d'arrêt ? Si oui à quel endroit ?

On souhaite maintenant donner une interprétation physique à la solution trouvée ci-dessus.

4. On s'intéresse d'abord à l'écoulement incompressible engendré par une source linéique selon (Oz) , de débit volumique linéique D_ℓ (débit volumique par unité de longueur de puits). Montrer que le champ de vitesse qui lui est associé est $\vec{v}_S = \frac{D_\ell}{2\pi r} \vec{u}_r$.
5. La superposition d'une source et d'un puits comparable de débits linéiques opposés $D_\ell > 0$ et $-D_\ell$, et distants de a , peut être qualifiée de *dipôle hydraulique*. On place le puits sur l'axe (Pz) avec $P(\frac{a}{2}, 0, 0)$ et la source sur l'axe (Sz) avec $S(-\frac{a}{2}, 0, 0)$. Exprimer le champ de vitesse $\vec{v}_d$ de ce dipôle dans l'approximation dipolaire au premier ordre utile.
6. Montrer que l'on peut établir l'expression du champ de vitesse autour du cylindre en superposant le champ du dipôle à un écoulement uniforme, en choisissant pour la constante $D_\ell a$ une valeur que l'on précisera. Interpréter.