

Dynamique des fluides

Écoulements visqueux incompressibles

EX 1 – Écoulement de Poiseuille cylindrique et applications

Un fluide homogène de viscosité η et de masse volumique μ s'écoule en régime stationnaire et incompressible dans une conduite cylindrique d'axe Oz vertical, de longueur L et de rayon R . Du fait des symétries du problème, on cherche un champ de vitesse du type $\vec{v}(M) = v(r, z)\vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques, et le champ de pression associé $P(M) = P(r, z)$.

1. En exploitant l'incompressibilité de l'écoulement, montrer que v ne peut en fait dépendre de z .
2. En définissant une particule de fluide judicieusement dans le système de coordonnées cylindriques, montrer que la force volumique de viscosité de cisaillement qui s'applique à elle s'écrit ¹

$$\frac{d\vec{F}_{\text{visc}}}{d\tau} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{u}_z$$

3. En exploitant les conditions aux limites pour la vitesse, établir la relation entre $v(r)$ et le gradient vertical de pression motrice $\frac{dP^*}{dz}$, où $P^* = P + \mu gz$.
4. En déduire la relation entre le débit volumique D_v et la différence $\Delta P^* = P_1^* - P_2^*$ des pressions motrices en entrée et sortie. Cette relation est-elle toujours valable si la conduite est inclinée ou horizontale ? Définir et expliciter la *résistance hydraulique* de la conduite. Commenter en comparant avec l'expression de la résistance électrique d'un conducteur filiforme cylindrique.
5. Calculer, pour une personne en position assise bras horizontal, la chute de pression dans une artère de longueur $L = 1$ m, de rayon $R = 0,5$ cm, où le débit vaut $D_v = 80 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, sachant que la viscosité du sang vaut $\eta = 4 \times 10^{-3}$ Pl. Commenter sachant que le cœur maintient une surpression ΔP normale de « 12-8 », c'est-à-dire oscillant entre 12 et 8 cm de mercure ². La position du bras est-elle importante ?
6. Un château d'eau alimente une canalisation cylindrique de longueur $L = 100$ m dont l'extrémité, située à une dénivellation $h_1 = 13$ m en dessous du fond du réservoir, est ouverte à la pression atmosphérique. Le réservoir est rempli à hauteur $h_0 = 3$ m. Sachant que la viscosité de l'eau est $\eta_e = 1,0 \times 10^{-3}$ Pa.s et le débit volumique en sortie $D_v = 5 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$, déterminer le diamètre de la canalisation et la vitesse maximale de l'eau en supposant les calculs précédents valables. Au regard du nombre de Reynolds, avait-on raison de supposer l'écoulement laminaire ?

1. On retrouve ici l'expression du laplacien vectoriel en cylindrique dans ce cas particulier.

2. Rappel : 1 bar = 76,0 cm Hg.

7. Une paroi poreuse est modélisée par une couche de matière d'épaisseur ℓ percée de n tubes cylindriques horizontaux par unité de surface, chacun de rayon a et de longueur ℓ ($a \ll \ell$). Une différence de pression ΔP entre les deux faces de la paroi poreuse est appliquée. Exprimer la *loi de Darcy*, donnant la vitesse moyenne (ou *vitesse débitante* $V = \frac{D_v}{S}$) d'écoulement du fluide à travers la paroi.

EX 2 – Viscosimètre de Couette

L'appareil se compose de deux cylindres verticaux coaxiaux d'axe (Oz) , de hauteur h , de rayons respectifs R_1 (rayon externe) et $R_2 > R_1$ (rayon interne). L'espace entre les cylindres est rempli par un fluide newtonien de viscosité η . Le cylindre extérieur est fixe dans le référentiel du laboratoire. Les paramètres sont tels que $R_2 - R_1 \ll R_1 \ll h$, de telle sorte que l'action du fond, fixe, est négligeable. Le cylindre intérieur est maintenu en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω constante grâce à un moteur fournissant un couple de moment résultant $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_z$. Dans le système de repérage cylindrique, le champ de vitesse peut ainsi s'écrire $\vec{v}(M) = r\omega(r)\vec{u}_\theta$, où $\omega(r)$ est la vitesse angulaire de la couche de fluide située au rayon r .

1. Exprimer le moment résultant $\mathcal{M}(r)$ selon (Oz) de la force visqueuse exercée par la couche située au-delà de r sur la couche située avant r , en fonction de ω et r .
2. En exploitant l'hypothèse du régime stationnaire, en déduire une équation différentielle vérifiée $\omega(r)$ et la résoudre. Retrouver cette équation différentielle en utilisant directement l'équation de Navier-Stokes et les expressions

$$\vec{\text{rot}}(v(r)\vec{u}_\theta) = \frac{1}{r} \frac{d(rv(r))}{dr} \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \Delta(v(r)\vec{u}_\theta) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(rv(r))}{dr} \right) \vec{u}_\theta.$$

3. En déduire la relation existant entre η et Γ . Pour une huile, on mesure $\Gamma = 1,1 \text{ N} \cdot \text{m}$. En déduire η sachant que $R_1 = 10$ cm, $R_2 = 11$ cm, $h = 20$ cm et $\Omega = 1,0$ tour par seconde. Sur quel(s) paramètre(s) peut-on jouer pour améliorer la précision du dispositif ?

EX 3 – Loi de Stokes

On s'intéresse à l'écoulement laminaire stationnaire d'un fluide visqueux incompressible et homogène de viscosité η autour d'une sphère lisse immobile de rayon R . Loin de cet obstacle, la vitesse est uniforme et vaut $\vec{v}_\infty = U\vec{u}_z$. Compte tenu de la petite échelle de la sphère, on néglige les effets de la pesanteur. On propose alors le champ de vitesse suivant, coordonnées et dans la base sphériques :

$$v_r = U \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad \text{et} \quad v_\theta = -U \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right)$$

1. Vérifier que ce champ de vitesse vérifie bien l'équation de Navier-Stokes dans le cas des très faibles nombres de Reynolds, et qu'il satisfait aux conditions aux limites. On pourra utiliser le formulaire.

- Calculer la force de traînée subie par la sphère, somme de la force de pression et de la force de frottement visqueux.

EX 4 – Glissement d'un solide sur une couche d'huile

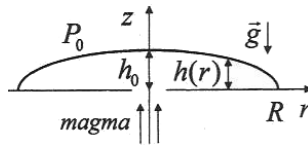
Un solide parallélépipédique de masse $M = 10 \text{ kg}$, d'aire de base $S = 0,10 \text{ m}^2$, glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 25^\circ$ par rapport à l'horizontale, avec une vitesse constante $v_0 = 80 \text{ cm.s}^{-1}$. Une couche d'huile d'épaisseur $e = 1,0 \text{ mm}$ sépare le solide du plan incliné.

- Établir l'expression du profil de vitesse supposé laminaire et de forme $\vec{v} = v(Z)\vec{u}_X$, où $\vec{u}_X$ est parallèle au plan incliné, et $\vec{u}_Z$ orthogonal ascendant.
- En déduire l'expression et la valeur numérique de la viscosité η de l'huile.

EX 5 – Dôme de lave

Suite à l'éruption rapide d'un volcan, une quantité fixée de magma a été rejetée par le cratère. Après l'éruption, le dôme de rayon R ainsi formé, très visqueux, commence à s'étaler très lentement, sur plusieurs mois. On souhaite trouver une loi approximative pour $R(t)$, en raisonnant en ordres de grandeur.

Le magma est supposé incompressible et homogène de masse volumique ρ et de viscosité η très élevée. On suppose la symétrie de révolution, l'écoulement radial, et on note $h_0(t)$ la hauteur du dôme au centre, $h(r)$ sa hauteur en r . On suppose le référentiel terrestre galiléen.



- Quels termes dominants doivent être retenus dans l'équation de Navier-Stokes pour rendre compte de ce phénomène ?
- Établir la loi de pression $P(r, z)$ au sein du dôme en fonction de la pression atmosphérique P_0 et $h(r)$. En déduire, en ordre de grandeur, la résultante des forces de pression s'appliquant à une particule de fluide de volume $d\tau = hrdrd\theta$.
- Exprimer de même, en ordre de grandeur, la force de frottement subie par cette même particule de fluide au niveau du sol. En déduire que

$$\frac{R}{h_0^3} \frac{dR}{dt} \approx \frac{\rho g}{\eta}.$$

- Par quelle relation approximative s'exprime la conservation du volume global ? En déduire une loi temporelle approximative pour $R(t)$.

EX 6 – Écoulement d'un fluide à seuil

On modélise l'écoulement d'une sauce à la tomate visqueuse mais non newtonienne le long d'un cylindre vertical de rayon R par un champ de vitesse incompressible, irrotationnel, et laminaire, sous le seul effet de son poids. Le champ de vitesse s'écrivant

$\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_z$, le comportement rhéologique de ce fluide est modélisé par le modèle suivant entre la vitesse et la contrainte $\sigma(r)$ exercée par le fluide à l'intérieur d'un cylindre de rayon r sur le fluide extérieur :

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\sigma_0 - \sigma(r)}{\eta} \quad \text{si } \sigma(r) > \sigma_0 \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dr} = 0 \quad \text{sinon,}$$

où $\eta \approx 1 \times 10^6 \text{ Pa.s}$ est une viscosité et $\sigma_0 \approx 50 \text{ Pa}$ un seuil de contrainte constant. On note $\mu \approx 1,4 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ sa masse volumique.

- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\sigma(r)$ en régime stationnaire
- Intégrer cette équation, en déduire $\sigma(r)$ et le champ de vitesse. Montrer qu'il est nécessaire que R soit supérieur à une certaine valeur pour que le fluide s'écoule. On parle d'*écoulement bouchon*.
- Déterminer l'ordre de grandeur du rayon minimal lorsque le réservoir qui surplombe le cylindre est vide.

EX 7 – Convection thermique entre deux plaques verticales

On considère un fluide visqueux incompressible de masse volumique μ et viscosité η situé entre deux plaques verticales placées en $x = -a$ et $x = a$ et supposées infinies, maintenues respectivement aux températures T_1 et $T_2 > T_1$ constantes. On introduit le coefficient de dilatation isobare $\alpha = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T}$, supposé faible. On se place en régime stationnaire. La masse volumique varie légèrement selon x , de telle sorte que $\mu(x) = \mu_0 + \delta\mu(x)$ où μ_0 est sa valeur moyenne, et $|\delta\mu(x)| \ll \mu_0$.

- Montrer que le fluide ne peut être à l'équilibre hydrostatique dans le champ de pesanteur.
- On suppose un champ de vitesse vertical invariant selon y (incompressible) $\vec{v}(M) = v(x)\vec{u}_y$. On note $\vec{j}_a = \mu h \vec{v}$ le flux advectif d'enthalpie et λ la conductivité thermique du fluide. Par un bilan d'énergie en régime stationnaire, montrer que $T(x)$ a un profil affine. En déduire que

$$\delta\mu(x) = \mu_0 \alpha \Delta T \frac{x}{a} \quad \text{avec} \quad \Delta T = T_2 - T_1$$

- Montrer que

$$-\frac{\partial P}{\partial y} - \mu g + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

En déduire l'équation différentielle vérifiée par $v(x)$ si on suppose que le champ de pression est très peu affecté par l'écoulement (relativement lent) et correspond à l'état de repos.

- En déduire le profil de vitesse $v(x)$.

Écoulements parfaits

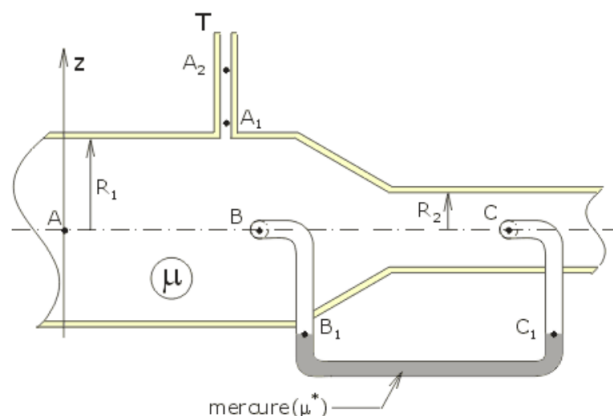
EX 8 – Clepsydre

Une Clepsydre, appelée *horloge à eau*, est un récipient à symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) et de section horizontale S variant en fonction de la cote z , comptée à partir d'un orifice O de très faible section s percé au fond.

1. Exprimer l'équation différentielle donnant la variation du niveau d'eau $\dot{z}$.
2. On suppose maintenant que le rayon de la section varie suivant la loi : $r(z) = r_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^\alpha$. En déduire le temps de vidange entre deux valeurs de la cote, en supposant que la clepsydre contient toujours une quantité d'eau significative. Pour quelle valeur de α ce temps est-il proportionnel à la variation de niveau ?

EX 9 – Débitmètre

Dans une canalisation d'eau, dont l'écoulement est supposé incompressible et parfait de masse volumique μ , on insère un débitmètre comportant deux sections de rayons respectifs R_1 et R_2 . La pression P_A en A avec $z(A) = 0$ est mesurée grâce à un tube T placé sur la canalisation de rayon R_1 , de hauteur telle que le fluide en écoulement ne puisse en sortir. La pression à l'air libre est la pression atmosphérique P_0 .



Un manomètre comportant deux prises latérales en B et en C contient, dans sa partie inférieure, du mercure de masse volumique ρ . On note respectivement V_1 et V_2 la vitesse de l'écoulement au voisinage des points B et C , et g l'accélération de la pesanteur.

Données : $P_0 = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$, $P_A = 1,5 \times 10^5 \text{ Pa}$, $\mu = 1,0 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho = 13,6 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 5 \text{ cm}$, $h = 1 \text{ cm}$ et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

1. Représenter, dans le manomètre, les deux surfaces de séparation mercure-eau. Justifier la différence de hauteur $h = z(C_1) - z(B_1)$.
2. Établir, en fonction de R_1 , P_A , P_0 , μ et g la hauteur h_0 à laquelle monte l'eau dans le tube. Application numérique.
3. Exprimer le débit volumique D dans la canalisation en fonction de R_1 , R_2 , h , μ , ρ et g . Application numérique.

EX 10 – Forme d'un filet d'eau

Un filet d'eau coule verticalement à l'air libre depuis l'orifice d'un robinet de section circulaire de rayon r_0 , avec un débit volumique D constant dans le temps. On le suppose à symétrie de révolution selon l'axe (Oz) vertical.

1. À quelle condition peut-on supposer que la pression est uniforme au sein du jet ? On supposera cette condition établie.
2. Déterminer l'équation $z = f(r)$, en coordonnées cylindriques, d'une génératrice de la surface libre du filet d'eau (courbe qui engendre la surface libre par révolution autour de (Oz)).

EX 11 – Vortex de Rankine dans l'eau

On utilise le modèle du vortex de Rankine pour modéliser simplement un tourbillon de vidange, à symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) vertical. La partie centrale, de rayon a , est en rotation solide de vitesse angulaire ω constante (vecteur tourbillon $\omega \vec{u}_z$), alors que la partie périphérique est un simple vortex irrotationnel :

$$\begin{cases} r \leq a : \vec{v}(M) = r\omega \vec{u}_\theta \\ r \geq a : \vec{v}(M) = \frac{a^2\omega}{r} \vec{u}_\theta \end{cases}$$

L'eau est assimilée à un fluide parfait, et la surface libre est au contact de l'air à pression atmosphérique P_0 .

1. Représenter les lignes de courant vues de dessus, pour $\omega > 0$.
2. Déterminer le champ de pression dans l'eau.
3. En déduire l'équation de la surface libre du tourbillon et la dessiner.

EX 12 – Oscillations amorties dans un tube rempli d'eau

Un tube en U fixe dans le laboratoire contient de l'eau. On note ℓ la longueur totale occupée par l'eau et r le rayon de la section circulaire du tube, avec $r \ll \ell$. À partir de la position d'équilibre, on translate la tube horizontalement avec une accélération constante $\vec{a} = a \vec{u}_x$, puis on l'arrête brusquement.

1. On s'intéresse à la phase d'accélération. En supposant le régime transitoire très court, établir la forme de la surface libre de l'eau dans le tube entier. Calculer l'angle d'inclinaison pour $a = 2 \text{ m.s}^{-2}$, et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.
2. En assimilant l'eau à un fluide parfait, déterminer la période des oscillations du liquide dans le tube. Calculer sa valeur pour $r = 1 \text{ cm}$ et $\ell = 1 \text{ m}$.
3. En réalité, les oscillations s'amortissent rapidement. Proposer une estimation du temps caractéristique d'amortissement sachant que la viscosité de l'eau à température ambiante vaut $\eta = 1,0 \times 10^3 \text{ Pl}$.

EX 13 – Effet Magnus sur un cylindre en rotation (*voile Flettner*)

Un bateau est muni d'un cylindre vertical de rayon a et de hauteur h , tournant autour d'un axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω . Le vent souffle à une vitesse uniforme $u \vec{u}_x$ par rapport au bateau. On se place dans le référentiel du bateau, dans lequel on

décrit l'écoulement, supposé stationnaire, parfait, incompressible et irrotationnel. Le potentiel de vitesse est pris, en coordonnées cylindriques, sous la forme

$$\Phi(M) = u \cos \theta \left(r + \frac{a^2}{r} \right) + \frac{C}{2\pi} \theta$$

1. Justifier la forme de l'expression de Φ , en calculant la vitesse en tout point, puis vérifiant notamment les conditions aux limites et le caractère incompressible. Justifier que C est du signe de ω .
2. Rechercher les éventuels points d'arrêt. Représenter qualitativement les lignes de courant.
3. Calculer la pression en tout point, puis en déduire la résultante des forces de pression par unité de longueur du cylindre.
4. Calculer la circulation Γ du champ des vitesses du fluide le long d'un cercle quelconque entourant le cylindre et exprimer la force linéique précédente en fonction de Γ . Préciser le sens de la force en fonction de la rotation. Vérifier la cohérence avec le théorème de Bernoulli.

EX 14 – Vents géostrophiques

Pour des mouvements atmosphériques (ou océaniques) d'échelle spatiale comparable avec le rayon terrestre, ou d'échelle temporelle comparable avec la durée du jour, on doit considérer l'effet de la rotation propre du globe. On note $\vec{\Omega}$ son vecteur rotation autour de l'axe Sud-Nord dans le référentiel géocentrique, avec $\Omega = \frac{2\pi}{86164} \text{ rad.s}^{-1}$ sa vitesse angulaire. Dans le référentiel terrestre, non galiléen, on étudie les mouvements de grande échelle quasi-horizontaux dans la troposphère, considérée comme une couche très fine de gaz de masse volumique ρ en écoulement parfait. On suppose que l'on peut étudier séparément ces écoulements par rapport aux mouvements de plus petite échelle (régimes de vents locaux, ondes de gravité internes...), ce qui n'est pas tout à fait correct puisque l'équation du mouvement des fluides est non linéaire. Au voisinage d'un point O de latitude λ à la surface du globe, on travaille avec le repère et la base cartésiens locaux où $\vec{u}_x$ est dans le plan méridien orienté Nord-Sud et $\vec{u}_z$ est colinéaire au champ de pesanteur et descendant.

1. Montrer que l'écoulement vérifie l'équation

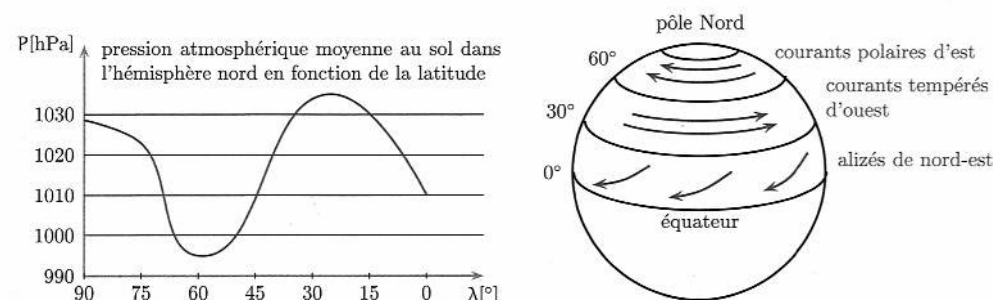
$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} p - 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

où $p(x, y, z, t)$ est l'écart de pression au point $M(x, y, z)$ par rapport à la pression hydrostatique $P_h(M, t)$, c'est-à-dire la pression qui régnerait si l'atmosphère était parfaitement immobile.

2. On définit le *nombre de Rossby* (noté Ro) comme le rapport en ordre de grandeur entre l'accélération des particules de fluide dans le référentiel terrestre et l'accélération de Coriolis. Calculer Ro pour les régimes de vents dominants ou les perturbations des moyennes latitudes (échelles spatiales de plusieurs milliers de km

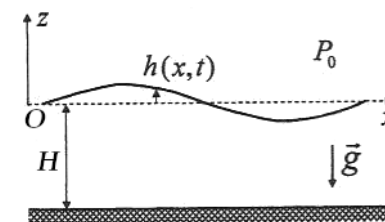
et temporelles de la journée à la saison, vitesses de l'ordre de 10 m.s^{-1}). Quels sont les deux termes dominants dans l'équation ci-dessus ?

3. En déduire une expression du champ de vitesse, supposé horizontal, en fonction de la perturbation de pression p , relation qualifiée d'*équilibre géostrophique*. Dans quel sens doit tourner le vent autour d'une dépression ou d'une surpression (usuellement qualifiée d'*anticyclone*³) dans les moyennes latitudes de l'hémisphère Nord ? Qu'en est-il dans les moyennes latitudes Sud ?
4. On s'intéresse ici spécifiquement aux régimes de vents dominants à l'échelle planétaire, c'est-à-dire en moyenne saisonnière, annuelle ou plus. Les figures ci-dessous représentent la pression atmosphérique de surface moyenne en fonction de la latitude d'une part, et la structure de la circulation générale horizontale de l'hémisphère Nord d'autre part. Expliquer la cohérence entre ces deux graphes. Retrouve-t-on le bon ordre de grandeur de vitesse de vent à la latitude de 45° ? Compléter la figure de droite pour l'hémisphère sud.



EX 15 – Modèle de houle - Ondes de gravité dans un liquide

On modélise les vagues sur une étendue d'eau, déclenchées par le vent ou une perturbation quelconque. On parle d'*ondes de gravité* car le fait que la hauteur de la colonne d'eau ne soit pas la même partout engendre un déséquilibre du fait de la pesanteur : un gradient horizontal de pression met en mouvement le fluide.



Ce dernier est supposé non visqueux, incompressible et homogène de masse volumique μ . La surface libre est au contact de l'air à la pression P_0 uniforme. On note g l'intensité du champ de pesanteur, H la profondeur moyenne du bassin, et h la perturbation

3. En anglais on utilise, de façon symétrique, les termes *cyclone* et *anticyclone* pour ces structures, quelque soit les latitudes. En français le terme *cyclone* est réservé aux structures tropicales (*hurricane* en anglais)... Le français a parfois ses raisons que la raison ignore.

de la surface libre, prise à $z = 0$ au repos. On se place dans l'hypothèse de petites perturbations $h \ll H$, de sorte qu'on linéarise l'équation d'Euler en négligeant la dérivée advective, mais aussi la condition limite à la surface. On se restreint au modèle bidimensionnel, donc à un écoulement plan indépendant de y du type

$$\vec{v}(M, t) = v(x, z, t) \vec{u}_x + w(x, z, t) \vec{u}_z.$$

On cherche une solution ondulatoire harmonique se propageant selon x , telle que $h(x, t) = h_0 \cos(\omega t - kx)$. L'écoulement étant parfait, on le suppose aussi irrotationnel.

1. Quel est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel de vitesse $\Phi(x, z, t)$? On le cherche en notation complexe sous la forme $\underline{\Phi}(x, z, t) = f(z) e^{i(\omega t - kx)}$. En déduire la forme générale de la fonction f et la déterminer complètement en appliquant les conditions aux limites en $z = -H$ et $z = h(x, t) \approx 0$.
2. Montrer que la quantité

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{P}{\mu} + gz$$

où P est la pression, est une constante dans l'espace et le temps. En déduire une relation dynamique entre la vitesse horizontale en surface et la perturbation h . Interpréter physiquement cette relation.

3. En déduire la relation de dispersion des ondes de gravité :

$$\omega^2 = gk \tanh(kH).$$

Le milieu est-il dispersif? Établir l'expression de la vitesse de phase dans les cas limites du milieu peu profond $H \ll \lambda$ et du milieu infiniment profond $H \gg \lambda$. Commenter. Expliquer qualitativement pourquoi une vague risque de se briser si le fond est incliné.

4. Pour une fréquence de 0,2 Hz, évaluer la longueur d'onde dans le cas où $H = 1$ m d'une part, puis $H = 1000$ m d'autre part. Vérifier la cohérence avec le choix du cas limite⁴
5. Dans cette question on suppose le milieu relativement profond, et on cherche à se représenter les trajectoires des particules de fluide. Une particule de position $(x_p(t), z_p(t))$ oscille autour de sa position moyenne (x_m, z_m) . En exploitant les solutions trouvées en 1., établir les équations différentielles vérifiées par $x_p(t)$ et $z_p(t)$. Les linéariser, toujours sous l'hypothèse de petites perturbations, puis les intégrer. Montrer que les trajectoires sont des ellipses d'autant plus aplaties que l'on s'approche du fond.

EX 16 – Modèle de cavitation

Sous l'effet d'une baisse brutale de pression, des bulles de gaz peuvent se former momentanément dans l'eau, avant d'imploser sous l'effet des forces de pression. Ce phénomène

particulièrement présent au voisinage des hélices de bateau provoque une forte usure. On se propose de la modéliser ici.

À l'instant $t = 0$, une cavité de rayon $a_0 \sim 1$ mm supposée vide (pression négligeable) se forme en O , puis son rayon $a(t)$ évolue. L'écoulement est supposé parfait, incompressible et de masse volumique uniforme μ , et modélisé par un champ de vitesse à symétrie sphérique $\vec{v}(M, t) = v(r, t) \vec{u}_r$ (on néglige donc l'effet de la pesanteur). Loin de la bulle, le fluide est insensible à la cavitation, et la pression vaut $p_\infty = 1$ bar constante.

1. Trouver un ordre de grandeur du temps d'implosion τ par analyse dimensionnelle.
2. En exploitant l'incompressibilité, exprimer $\vec{v}(M, t)$ en fonction de $a(t)$. Puis montrer que l'écoulement est potentiel, et calculer son potentiel.
3. En exploitant une intégrale première de l'équation d'Euler, établir que $a(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$a(t) \ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 = -\frac{p_\infty}{\mu}$$

4. Intégrer cette équation en posant le changement de fonction $Z(a) = \dot{a}^2$.
5. En déduire l'expression de τ en fonction de l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}} dx \approx 1,29$$

En déduire une évaluation numérique de τ .

6. À l'instant où $a(t) = \frac{a_0}{10}$, l'équation d'Euler impose sur le champ de pression la relation approchée suivante qu'on ne demande pas d'établir :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{p_\infty} \right) = \frac{2a_0}{15r^2} \left(\frac{a_0^3}{r^3} - 250 \right).$$

Montrer que la pression dans le fluide passe par un maximum p_M en $r = r_M$ qu'on évaluera numériquement. Conclure.

4. On pourra aussi passer par une résolution numérique de la relation de dispersion exacte.