

Mécanique Quantique

Données utiles pour les exercices :

- Masses de l'électron $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg, du proton $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg.
- Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s.
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K $^{-1}$.
- Constante de Cavendish : $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ N.m 2 .kg $^{-2}$.
- Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23}$ mol $^{-1}$.

EX 1 – Approche semi classique de l'atome d'hydrogène

1. Déterminer d'un point de vue classique la quantité de mouvement de l'électron en orbite circulaire autour du proton.
2. En déduire la longueur d'onde de De Broglie associée et montrer que, le rayon de l'orbite, en régime stationnaire, ne peut prendre que des valeurs a_n quantifiées par un entier n .
3. Montrer que l'énergie de l'atome d'hydrogène est aussi quantifiée et s'exprime sous la forme $E_n = \frac{\alpha}{n^2}$.
4. En déduire que les longueurs d'onde des ondes absorbées par un atome d'hydrogène dans son état fondamental sont données par $\frac{1}{\lambda_n} = R_0 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ où R_0 est la constante de Rydberg dont on donnera l'expression puis la valeur numérique.

EX 2 – Gaz quantique ou classique

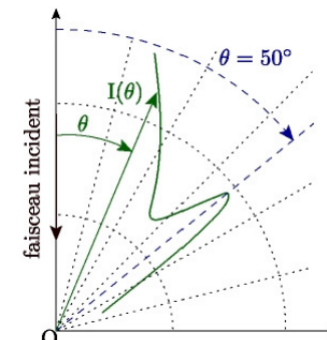
1. On considère de l'hélium gazeux à température ambiante et à la pression atmosphérique. L'énergie cinétique moyenne d'un atome d'hélium est égale à $E = \frac{1}{2}k_B T$ où k_B la constante de Boltzmann.
 - a) Déterminer et évaluer numériquement la vitesse quadratique moyenne d'un atome d'hélium.
 - b) Calculer la longueur d'onde de De Broglie correspondante. La comparer à la distance moyenne entre atomes d'hélium.
 - c) On s'attend à ce que les effets quantiques puissent jouer un rôle lorsque la longueur d'onde de Broglie est de l'ordre de grandeur ou plus grande que la distance moyenne inter-atomique. Expliquer pourquoi et dites si l'étude de ce gaz d'hélium vous semble relever ou pas de la mécanique quantique.
2. Lors de la formation d'un cristal métallique, on suppose que chaque atome du cristal fournit un électron. L'ensemble de ces électrons libre constitue un gaz où l'énergie de chaque électron est de l'ordre de l'électron-volt. La conduction de l'électricité dans un métal est liée au gaz d'électrons libres. Relève-t-elle d'un traitement quantique ou classique ?

Données : $M_{\text{Cu}} = 63 \text{ g.mol}^{-1}$ et $\rho_{\text{Cu}} = 8,9 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

EX 3 – Diffusion d'électrons par un cristal (Davisson & Germer, 1927)

Davisson et Germer ont validé le concept des ondes de De Broglie pour des électrons en 1927. Pour ce faire, ils ont fait parvenir, en incidence normale, un faisceau parallèle incident d'électrons accélérés par une différence de potentiel U sur un cristal de nickel dans le vide. Un détecteur était chargé de mesurer pour divers angles de diffusion θ (« à l'infini ») l'intensité électronique $I(\theta)$ correspondante.

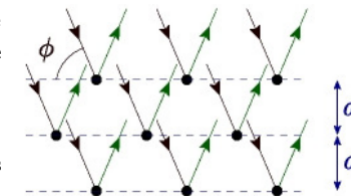
La figure précise le diagramme angulaire d'intensité relevée pour la tension $U = 54 \text{ V}$ (sachant que des mesures pour d'autres tensions ont aussi été effectuées).



1. Lors de l'étude de la diffraction de rayons X par un cristal, les physiciens Bragg (père et fils) ont proposé en 1912 la *formule de Bragg* (prix Nobel 1915),

$$2d \sin \Phi = n\lambda \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

qui rend compte du lien entre la distance réticulaire d , la longueur d'onde λ , et l'angle Φ formé par le rayon émergent avec les plans dans le cas d'une réflexion spéculaire^a.



a. On parle de réflexion *spéculaire* quand la loi de Descartes de la réflexion en optique géométrique est vérifiée, par opposition à la réflexion *diffuse* qui se fait dans toutes les directions, en raison du caractère irrégulier de la surface.

- a) Expliquer pourquoi le rayonnement obtenu par réflexion spéculaire sur les atomes d'un même plan réticulaire est particulièrement intense.
 - b) En déduire une justification de la formule de Bragg, en considérant les interférences entre les ondes réfléchies spéculairement sur des plans voisins.
2. On commence par utiliser des rayons X pour déterminer la distance entre les plans réticulaires, qui est de $d = 0,091 \text{ nm}$.
 - a) En exploitant le graphe ci-dessus, en déduire la valeur de Φ puis celle des longueurs d'onde équivalentes $\lambda_{eq\ n}$ envisageables du faisceau électronique.
 - b) Confronter ces longueurs d'onde avec la longueur d'onde de De Broglie λ_{DB} du faisceau électronique. Conclure.

EX 4 – La course aux hautes énergies

Montrer, grâce à l'inégalité d'Heisenberg, que si l'on cherche à étudier la matière à une échelle spatiale très faible d à l'aide d'un quanton matériel de masse m d'énergie E et d'impulsion p (avec $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ en relativité), cela impose de travailler à de hautes énergies telles que :

$$E \gg \frac{\hbar c}{2d}$$

Que peut-on en conclure concernant les perspectives d'étude permises par Large Hadron Collider (LHC ou Grand Collisionneur de hadrons), pouvant atteindre une énergie de collision de l'ordre de 10 TeV ?

EX 5 – Niveau zéro d'un oscillateur harmonique quantique

Un oscillateur harmonique unidimensionnel a une masse m , une pulsation propre ω_0 . Il est soumis à une énergie potentielle $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$. La position moyenne $\langle x \rangle$ et la quantité de mouvement moyenne $\langle p_x \rangle$ de l'oscillateur sont supposées nulles par symétrie.

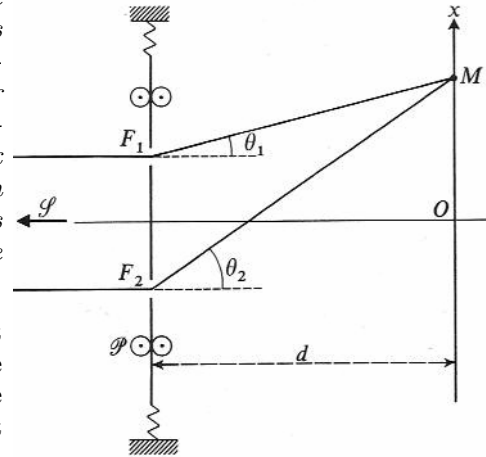
1. Montrer que l'énergie du mode fondamental ne peut être nulle et trouver sa valeur minimale. Exprimer la distance quadratique moyenne associée à cet état fondamental.
2. En utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie de la mécanique classique, exprimer la température critique T_c en dessous de laquelle les fluctuations quantiques de l'état fondamental sont plus importantes que les fluctuations thermiques.
3. Application numérique.
 - a) Que vaudrait T_c pour un système masse-ressort macroscopique de laboratoire ?
 - b) En 2010, une équipe de l'Université de Californie à Santa Barbara a atteint le régime quantique en amenant un micro résonateur piézo-électrique de fréquence très élevée (6,0 GHz) à une température de 25 mK. Commenter le choix d'un oscillateur de fréquence élevée et d'une température aussi faible.

EX 6 – Expérience des fentes d'Young et principe de complémentarité

L'expérience des fentes d'Young, réalisée avec des photons ou des corpuscules matériels montre qu'une particule quantique, ou quanton, ne peut être représentée uniquement par ses aspects corpusculaires, ou inversement uniquement par ses aspects ondulatoires. Les deux facettes du quanton sont complémentaires. En témoigne le fait que les franges d'interférences disparaissent si l'on essaie de savoir par quelle fente le quanton est passé.

On cherche ici à détecter par quelle fente est passé le quanton, en rendant mobile la plaque $\mathcal{P}$ support des fentes : supposée pouvoir se déplacer sans frottements selon $\vec{u}_x$, celle-ci est maintenue via une force de rappel.

La source $\mathcal{S}$ est très éloignée et les quantons arrivent avec une impulsion $\vec{p} = p\vec{u}_z$ parallèle à l'axe de symétrie Oz . Les fentes sont distantes de a et l'écran de détection des impacts est à une distance $d \gg a$. Au passage d'un quanton, si celui-ci passe par



une fente déterminée, son impulsion est modifiée d'un angle θ_1 ou θ_2 selon la fente. Par conservation de la quantité de mouvement, la plaque $\mathcal{P}$ absorbe la différence $-p_x$. Cela doit permettre de mesurer l'impulsion du quanton en sortie de fente, et ainsi déterminer par quelle fente il est passé.

1. Établir l'expression de la densité de probabilité sur l'écran en fonction de x , puis exprimer l'interfrange en fonction de p .
2. Exprimer θ_1 et θ_2 en fonction de x et des paramètres utiles. En déduire la limite supérieure d'incertitude Δp_x très en dessous de laquelle il faut se placer pour mesurer correctement p_x sur $\mathcal{P}$.
3. Comment l'incertitude Δx sur la position de $\mathcal{P}$ est-elle alors contrainte ? En déduire que les franges d'interférences sont inobservables.

EX 7 – Interférences de particules à 3 fentes

On considère une expérience d'interférences, où un faisceau de particules quantiques est dirigé vers trois fentes contenues dans un même plan. La détection des particules est effectuée en un point M à grande distance du plan contenant les trois fentes. On note $\Psi_k(M)$ l'amplitude de probabilité en M lorsque seule la fente k est ouverte. On suppose que

$$\Psi_1(M) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \Psi_2(M) = \frac{i}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \Psi_3(M) = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Déterminer la densité de probabilité de détection d'une particule au voisinage du point M lorsque :

1. seule la fente 2 est ouverte ;
2. les fentes 1 et 2 sont ouvertes ;
3. les fentes 1 et 3 sont ouvertes ;
4. toutes les fentes sont ouvertes.

EX 8 – Évolution d'un paquet d'onde gaussien de particule libre

Une particule libre se déplaçant selon l'axe Ox est modélisée par un paquet d'onde gaussien centré sur l'impulsion moyenne p_0 supposée constante puisque la particule est libre, et de largeur Δp :

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(p) e^{\frac{i}{\hbar}(px - E(p)t)} dp \quad \text{avec} \quad g(p) = g_0 e^{-\frac{(p-p_0)^2}{4(\Delta p)^2}} \quad \text{et} \quad p_0 \gg \Delta p.$$

La largeur Δp correspond à l'écart quadratique moyen ¹ de $|g(p)|^2$, qui doit être associé à l'écart quadratique moyen Δx de la densité de probabilité ² $|\Psi(x, t)|^2$. On utilisera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2(\xi+\beta)^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que } \text{Arg}(\alpha) \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[\quad , \quad \forall \beta \in \mathbb{C}.$$

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} (p - p_0)^2 |g(p)|^2 dp = \Delta p$ si g_0 est choisi pour que $|g(p)|^2$ soit normalisée.
2. Théorème de Parseval-Plancherel : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(p)|^2 dp = 1$.

1. Tracer l'allure du spectre $|g(p)|^2$.
2. Montrer que

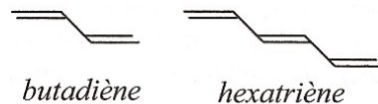
$$|\Psi(x, 0)|^2 = C e^{-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}}$$

et exprimer Δx en fonction de Δp . Est-ce cohérent avec l'inégalité de Heisenberg ?

3. Exprimer la constante C en fonction de Δx uniquement.
4. Exprimer maintenant $|\Psi(x, t)|^2$ et interpréter. Que vaut notamment sa largeur $\Delta x(t)$? Décrire l'évolution du paquet d'onde en représentant $|\Psi(x, t)|^2$ pour trois instants $t_1 < 0$, $t_2 = 0$ et $t_3 > 0$.
5. En déduire la vitesse de variation de $\Delta x(t)$ pour t suffisamment grand. En fait ce résultat est assez général : le retrouver sans invoquer le caractère gaussien et en raisonnant uniquement sur la dispersion en vitesse de groupe.
6. Évaluer la durée nécessaire pour un élargissement d'un facteur 2 pour un électron initialement confiné dans un atome, un proton initialement confiné dans un noyau, puis un grain de poussière de masse $m = 10^{-15}$ kg et de taille $\ell = 1 \mu\text{m}$.

EX 9 – Effet de délocalisation dans une chaîne carbonée

On considère que dans la molécule de butadiène les quatre électrons du système conjugué π (résultant de la conjugaison des orbitales atomiques $2p_z$ des atomes de carbone) sont délocalisés sur l'ensemble de la chaîne carbonée de la molécule. De même pour les six électrons de l'hexatriène.



Dans ce modèle, les électrons se répartissent sur les niveaux successifs d'un puits plat infiniment profond dont la largeur est sensiblement égale à celle de la molécule. On considère les électrons indépendants mais on tient compte du principe d'exclusion de Pauli dans le remplissage des niveaux successifs du puits.

1. Sachant que la distance carbone-carbone est $a_{cc} = 1,5$ angström ($1\text{\AA} = 10^{-10}$ m), quelles sont les largeurs a_b et a_h des deux puits respectivement associés au butadiène et à l'hexatriène ?
2. Représenter les premiers niveaux pleins de chaque molécule dans son état fondamental. Identifier le dernier niveau rempli et le premier niveau vide.
3. Évaluer et comparer les longueurs d'onde maximales d'un photon absorbé par l'une ou l'autre des molécules dans son état fondamental. Dans quel sens se décale la fréquence du fait d'une augmentation de la délocalisation ? Lorsqu'on recherche une molécule à l'usage de colorant, commenter l'intérêt de la délocalisation.

EX 10 – Résistance quantique

On s'intéresse au passage du courant le long d'un conducteur filiforme de très petite taille, de section carrée de côté $a \sim 1$ nm et de longueur $\ell \sim 1 \mu\text{m} \gg a$ selon l'axe (Ox) ,

lorsqu'une différence de potentiel est appliquée entre ses extrémités. Ces dernières sont connectées à deux métaux (1 en $x = 0$ et 2 en $x = \ell$) de manière à imposer une tension $U = V_1 - V_2$ et faire circuler un courant I de 1 vers 2. Les électrons présents et mobiles à l'intérieur du fil sont traités comme des particules quantiques, de masse m , libres de se déplacer selon (Ox) . On adopte une description monodimensionnelle selon x des états propres, où un électron est décrit par une onde de De Broglie de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$.

1. Rappeler l'expression de la fonction d'onde $\Psi_k(x, t)$ associée à un de ces électrons. Que vaut $\Psi(0, 0)$ si l'on suppose que l'électron est de façon certaine à l'intérieur du fil ?
2. En utilisant le courant de densité de probabilité, exprimer l'intensité électrique i_k du courant associé à cet électron.
3. Malgré la présence des métaux 1 et 2 de part et d'autre du fil quantique, et du champ électrique en présence, on assimile momentanément le fil à un puits infini de largeur ℓ afin de dénombrer les électrons au voisinage de k . Rappeler les valeurs possibles de k .
En considérant uniquement les valeurs telles que $k\ell \gg 1$, qui évoluent comme un continuum, en déduire le nombre dn d'états propres existant entre k et $k + dk$.
4. En déduire l'intensité dI_k associée à l'ensemble des électrons de pulsation spatiale située entre k et $k + dk$.
5. On admet que dans chacun des métaux 1 et 2 de part et d'autre, les électrons occupent un continuum de niveaux d'énergie s'élevant respectivement jusqu'à E_1 et $E_2 = E_1 - eU$ en raison de la tension U appliquée. Ainsi, les électrons de 1 qui transitent spontanément vers l'extrémité 2 sont ceux dont l'énergie vérifie $E > E_2$. En déduire l'intensité totale I circulant à travers le fil en fonction de U . Exprimer la résistance ainsi mise-en-évidence et faire l'application numérique. Commenter.

EX 11 – État fondamental gravitationnel d'une étoile naine

Au-delà d'une certaine taille, la pression gravitationnelle domine devant les interactions électrostatiques au niveau atomique, et la cohésion de l'astre se trouve déterminée par un équilibre entre la gravitation et la *pression quantique*, c'est-à-dire l'effet du confinement sur l'énergie cinétique, conformément aux inégalités de Heisenberg spatiales. On souhaite ici en déduire la taille d'équilibre d'un tel astre, supposé sphérique de rayon R , constitué de N atomes identiques à A nucléons (masse m_p) et Z charges, et de masse totale M .

1. Exprimer l'énergie potentielle gravitationnelle E_p de cette boule à un facteur sans dimension près, par un argument dimensionnel³.
2. Exprimer le rayon caractéristique δ alloué à un atome en fonction de N et R .
3. Les noyaux étant confinés dans le même volume que les électrons de valence, justifier que leur énergie cinétique est négligeable au regard de celle des électrons de valence.

3. Facultatif : en s'aidant du cours d'électrostatique, retrouver que ce facteur vaut $\frac{3}{5}$.

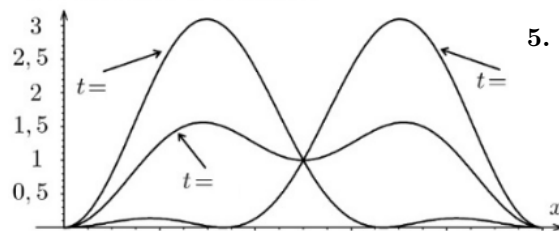
- Les électrons de cœur étant aussi moins confinés, dans la suite on ne considère que les électrons de valence, supposés au nombre de k par atome. En déduire un minorant de l'énergie totale fonction du nombre N de particules, et exprimer le rayon d'équilibre R en fonction de N . La dépendance vous semble-t-elle correcte? Pourquoi? Expliquer.
- Le Soleil a pour masse $M_{\odot} = 2,0 \times 10^{30}$ kg et pour rayon $R = 7,0 \times 10^5$ km. Il est constitué aux trois quarts d'hydrogène, et un quart d'hélium. Le résultat précédent s'applique-t-il? Quid de l'étoile naine de Van Maanen ($M = 0,68M_{\odot}$ et $R = 8900$ km)? Expliquer.

EX 12 – États propres et superposition d'états dans un puits infini

Une particule de masse m est piégée dans un puits infini de largeur a situé dans le domaine $[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}]$.

- Retrouver l'expression des états propres/stationnaires $\Psi_n(x, t)$ normalisés et de leur énergie E_n . Ces états sont-ils dégénérés?
- On note p l'impulsion de la particule dans l'état n . Pourquoi peut-on affirmer que $\langle p \rangle = 0$? En déduire la valeur de l'écart-type Δp en fonction de n .
- Calculer l'écart-type Δx dans l'état n . Le principe d'indétermination de Heisenberg est-il vérifié? Est-il saturé?
- Une particule est supposée dans une superposition des états $n = 1$ et $n = 2$ avec des poids égaux. Écrire sa fonction d'onde Ψ en fonction de Ψ_1 et Ψ_2 , en veillant à la normaliser. En déduire la densité de probabilité de présence en x et en t . On introduira la fréquence $\nu_{12} = \frac{E_2 - E_1}{h}$. Les graphes de cette densité sont présentés ci-dessous à trois instants distincts. Exprimer ces instants en fonction de ν_{12} .

densité linéique de probabilité



- Calculer la position moyenne $\langle x \rangle$ de ce paquet d'onde en fonction du temps, de a et de ν_{12} . La représenter en fonction du temps. Est-ce compatible avec les graphes ci-contre?

Formulaire :

$$\int_{-n\frac{\pi}{2}}^{n\frac{\pi}{2}} u^2 \cos^2(u) du = \int_{-n\frac{\pi}{2}}^{n\frac{\pi}{2}} u^2 \sin^2(u) du = \frac{n^3 \pi^3}{24} + \frac{n\pi}{4} (-1)^n$$

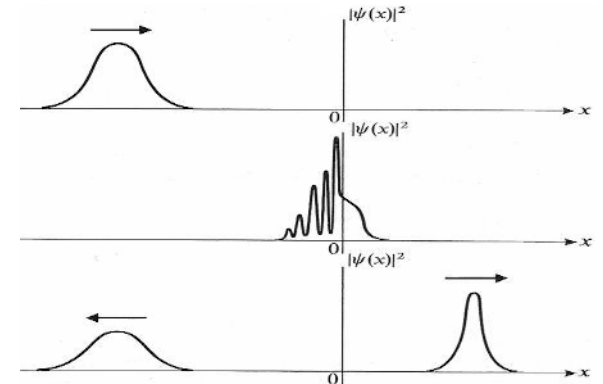
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u \cos(u) \sin(2u) du = \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(u) du = \frac{8}{9}$$

EX 13 – Marche montante de potentiel

On s'intéresse à un flux de particules incidentes avec une vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ venant de $x \rightarrow -\infty$ sur une marche de potentiel en $x = 0$: si $x < 0$, $V(x) = 0$ et si $x > 0$, $V(x) = V_0 > 0$. On suppose tout d'abord que l'énergie cinétique des particules est $E > V_0$. On posera $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$ et $k_2 = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$.

- Établir la forme des états stationnaires dans chacun des deux domaines.
- En utilisant les conditions de raccordement, montrer que l'on peut définir des coefficients de réflexion r et de transmission τ en amplitude de probabilité. Exprimer ces coefficients en fonction de k_1 et k_2 .
- Associer un courant de probabilité aux différents termes et déterminer les coefficients R et T de réflexion et transmission en probabilité. Comment sont liés R et T ? Commenter les résultats en comparant notamment avec la mécanique classique, ou l'optique ondulatoire. Que retrouve-t-on pour $E \gg V_0$?

- En superposant des états stationnaires d'énergies voisines de E , on forme un paquet d'ondes représentant une particule quantique incidente. La figure ci-contre représente la densité de probabilité de présence à trois instants (croissant de haut en bas). Commenter les graphes en expliquant notamment les différences de position et de forme entre les paquets.



- En réutilisant les calculs précédents, traiter le cas où $E < V_0$. Comment sont modifiés les coefficients R et T ? Commenter.

EX 14 – Ressaut de potentiel

On modélise un flux de particules incidentes avec une vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ venant de $x \rightarrow -\infty$ sur une barrière de potentiel définie par $V(x) = 0$ si $x < 0$ ou $x > \ell$, et $V(x) = V_0 > 0$ si $x \in [0, \ell]$. On s'intéresse au cas où leur énergie cinétique est $E > V_0$, d'où l'appellation de *ressaut*. On posera $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$ et $k_2 = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$.

- Déterminer la forme des états stationnaires dans chacun des trois domaines.
- En utilisant les conditions de raccordement, montrer que l'on peut définir des coefficients de réflexion r et de transmission τ en amplitude de probabilité. Exprimer ces coefficients en fonction de k_1 et k_2 .
- En déduire les coefficients R et T de réflexion et transmission en probabilité. Comment sont liés R et T ?

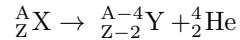
4. On admet que l'on obtient finalement $T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)} \sin^2 \left(\sqrt{2m(E-V_0)} \frac{\ell}{\hbar} \right)}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de l'énergie retrouve-t-on exactement les résultats de la mécanique classique ? Interpréter en exprimant la condition en terme de longueur d'onde de De Broglie. Pourquoi parle-t-on alors de *résonance de diffusion* ? Quel sera le comportement d'une particule représentée par un paquet d'ondes centré autour d'une de ces énergies ?

5. Des électrons d'énergie cinétique égale à 10 eV s'approchent d'une barrière de potentiel de hauteur 4 eV. Déterminer les épaisseurs de la barrière pour lesquelles la transmission du faisceau électronique est totale.

EX 15 – Radioactivité alpha

La radioactivité α est l'émission par un noyau A_ZX d'un noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$ ou particule α :



Dans une théorie élémentaire de la radioactivité α proposée par Gamow en 1928, on considère que la particule α préexiste dans le noyau X, considéré comme résultant de la réunion du noyau Y et de la particule α . La loi d'interaction entre ces deux particules est définie par leur énergie potentielle $V(r)$ représentée ci-dessous en fonction de leur distance r . En première approximation, le rayon d'un noyau suit la loi $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ avec $r_0 = 1,2 \times 10^{-15}$ m.

Si r est supérieur à une limite pratiquement égale au rayon du noyau Y (car la particule α est quasi ponctuelle), l'énergie potentielle V est supposée due à la seule répulsion électrostatique entre les $Z - 2$ protons de Y et les 2 protons de ${}^4_2\text{He}$:

$$V(r) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Pour $r < R$, les interactions nucléaires attractives (*interaction forte*) dominent, ce que l'on schématise par un puits de potentiel très profond représenté ci-contre.

L'énergie de la particule α est $E = 4,78$ MeV. Le coefficient de transmission peut se mettre sous la forme approchée :

$$\ln T \approx -2 \int_R^{R_c} \frac{\sqrt{2m_\alpha(V(r) - E)}}{\hbar} dr \approx -\frac{341}{\sqrt{E \text{ (en MeV)}}} + 74,8$$

1. En repartant de la relation exacte de T trouvée en cours pour une barrière de potentiel rectangulaire, justifier la forme approchée sous forme intégrale ci-dessus. On ne cherchera pas à calculer l'intégrale.

2. On considère un atome X de radium ${}^{226}_{88}\text{Ra}$. Calculer R et R_c . Expliquer pourquoi l'émission α ne peut se faire que par effet tunnel.
3. On considère que la particule α de vitesse v rebondit un certain nombre de fois sur la paroi avant de sortir. On appelle t_0 la durée entre deux collisions et τ la durée de vie moyenne de la particule α dans le puits de potentiel (ou *temps de demi-vie* radioactive). Exprimer t_0 et τ en fonction de R , v et T .
4. L'énergie E des particules α peut varier entre 4 et 9 MeV pour les différents émetteurs α . Montrer avec le modèle précédent que t_0 est presque le même pour tous les émetteurs α . En déduire une formule approchée numérique de $\ln \tau$ en fonction de E exprimée en MeV. Faire l'application numérique pour les valeurs de E citées ci-dessus et pour le cas de ${}^{226}_{88}\text{Ra}$.

