

Composition - Référentiels non galiléens

EX 1 – Troisième vitesse cosmique

On se propose déterminer la troisième vitesse cosmique, à savoir la vitesse minimale de lancement d'un engin spatial dans le référentiel géocentrique, depuis le « sommet » de l'atmosphère (environ $h = 200$ km d'altitude, frottements négligeables), pour que celui-ci puisse s'échapper du système solaire. Ce calcul ne prend en compte que les interactions avec la Terre et le Soleil. Les référentiels sont supposés galiléens. On exprimera in fine tous les résultats en fonction des données ci-dessous.

Données : champ de gravitation à la surface de la Terre, $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, rayon terrestre, $R_T = 6,4 \times 10^3$ km, distance Terre-Soleil, $D = 1,5 \times 10^8$ km, période de révolution terrestre, $T = 1$ an.

1. Retrouver les expressions et valeurs de la première vitesse cosmique v_1 (mise en orbite au sommet de l'atmosphère) puis de la seconde vitesse cosmique v_2 (vitesse de libération du champ d'attraction terrestre).
2. On considère une vitesse de lancement $v_0 > v_2$. Que vaut la vitesse v_f dans $\mathcal{R}_G$ lorsque l'engin peut être considéré sorti de la sphère d'influence de la Terre ?
3. On se place à cet instant, où l'on peut considérer que l'engin n'est soumis qu'à l'influence du Soleil, et qu'il est encore très proche de la Terre à l'échelle du Système solaire. Que vaut la vitesse de l'engin dans le référentiel Héliocentrique $\mathcal{R}_\odot$? On notera v_T celle de la Terre, et on considérera la configuration la plus favorable, c'est-à-dire celle où les vecteurs $\vec{v}_f$ et $\vec{v}_T$ sont parallèles et de même sens (pour une propulsion maximale).
4. Retrouver l'expression de la vitesse de libération du système solaire, évaluée dans $\mathcal{R}_\odot$, qu'on notera v'_2 .
5. En déduire la troisième vitesse cosmique, notée v_3 , en fonction de v_1 et v_T . Faire l'application numérique.

EX 2 – Mouvement d'un palet sur un plateau oscillant

Un palet de masse m est posé sur un plateau horizontal. Ce plateau est animé par rapport au sol d'un mouvement sinusoïdal vertical décrit par l'équation : $z(t) = a \cos(\omega t)$. On désigne par g l'intensité du champ de pesanteur.

1. Quelle condition doit satisfaire ω pour que le palet ne quitte pas le plateau ? A.N. : $a = 5$ cm et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$; calculer la fréquence seuil.
2. On envisage maintenant des oscillations de même amplitude mais horizontales de ce même plateau. Le coefficient de frottement sec entre le palet et le plateau est $f = 1,0$. Calculer la fréquence seuil de glissement.
3. On envisage une dernière situation : le palet est placé au bord du plateau, à une distance $r = 2$ cm du centre. On met le plateau en rotation propre à la vitesse angulaire constante ω . À partir de quelle valeur de ω le palet décroche-t-il

EX 3 – Mouvements pendulaires dans un wagon

Un wagon est en mouvement uniformément accéléré par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ avec l'accélération $\vec{a}_0$. À l'intérieur, on étudie les petites oscillations planes d'un pendule simple formé par une masse m et d'un fil de longueur ℓ accroché au plafond du wagon. On note $\mathcal{R}_w$ le référentiel du wagon.

1. Établir l'équation différentielle caractéristique du mouvement du pendule.
2. En déduire l'angle θ_e correspondant à l'équilibre du pendule dans $\mathcal{R}_w$.
3. Montrer que l'équation différentielle caractéristique des petits mouvements du pendule au voisinage de cette position d'équilibre est celle d'un oscillateur harmonique dont on donnera la pulsation propre ω_0 .
4. On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et $\ell = 1$ m. En déduire la valeur de θ_e si $a_0 = g$, ainsi que la période des petites oscillations.

EX 4 – Gaz en rotation

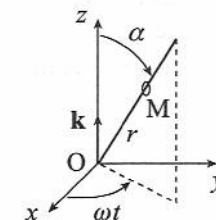
Un cylindre de rayon a est rempli d'air, assimilé à un gaz parfait à la pression atmosphérique P_0 . Le cylindre est mis en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire constante ω . L'air qu'il contient est entraîné à cette même vitesse. La température est maintenue constante.

Calculer la loi $P(r)$ de la pression de l'air en fonction de la distance r à l'axe (en négligeant la pesanteur).

Application numérique : Calculer la pression de l'air sur la paroi du cylindre pour une vitesse de rotation de 30000 tours par minute, pour $a = 10$ cm et $T = 300$ K.

EX 5 – Anneau sur une tige

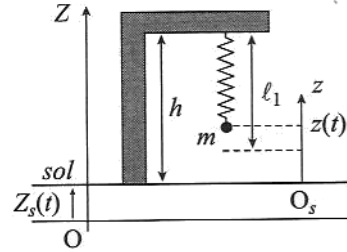
Une tige rigide, faisant un angle α avec la verticale, tourne à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ autour de celle-ci dans un référentiel galiléen. Un anneau de masse m est situé en M , et peut coulisser sans frottement le long de cette tige. On note $r = OM$.



1. Déterminer la position d'équilibre r_{eq} dans le référentiel de la tige, et sa stabilité.
2. À $t = 0$, la masse étant à l'équilibre, la vitesse de rotation passe de ω à $\omega/2$. À l'aide d'un raisonnement énergétique, prévoir l'évolution de l'anneau. Déterminer $r(t)$, ainsi que le temps au bout duquel l'anneau atteint O .

EX 6 – Étude d'un sismographe à ressort

Un sismographe est un appareil destiné à enregistrer les vibrations de la surface terrestre sous l'action d'un séisme. Celui-ci est constitué d'un support rigide, posé sur le sol, de hauteur h . Un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , est suspendu à ce support. Une masse m est fixée à l'extrémité du ressort, qui prend alors la longueur ℓ_1 à l'équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ en l'absence de séisme. Nous envisageons ici une vibration verticale du sol : $z_s(t) = Z_0 \cos(\omega t)$ par rapport au niveau de référence $Z = 0$.



1. Établir l'expression de la longueur ℓ_1 à l'équilibre.
2. Lors des mouvements du sol, la masse oscille verticalement, amortie par un frottement fluide de l'air, proportionnel à la vitesse et de coefficient α . La position de la masse est repérée par rapport au sol (O_s) à l'aide de l'ordonnée $z(t)$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
3. Le frottement est supposé faible. En régime forcé, $z(t)$ est de la forme

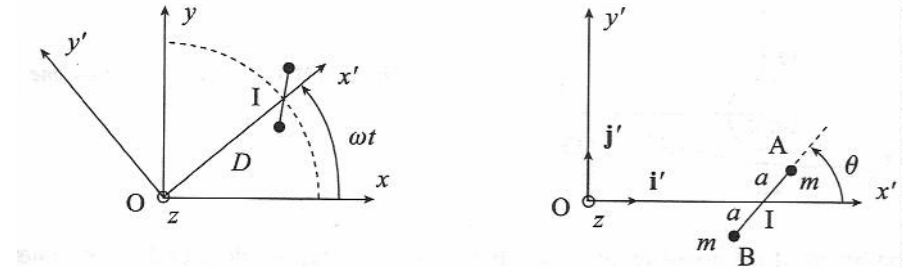
$$z(t) = A_0 + A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Quelle condition doit être vérifiée pour être en régime forcé? Justifier que l'on puisse déterminer indépendamment : A_0 d'une part et (A_m, φ) d'autre part. Établir l'expression de ces grandeurs en fonction de ω .

4. Tracer l'allure de $A_m(\omega)$. Interpréter physiquement les valeurs obtenues lorsque $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$.
5. L'utilisateur souhaite mesurer les vibrations du sol à l'aide du sismomètre. La pulsation étant fixée, comment doit-il choisir k et m ? Pourquoi est-il intéressant de contrôler le frottement, c'est-à-dire d'imposer la valeur du coefficient α ? Comment le choisir?
6. Si les fréquences à enregistrer sont de l'ordre de 0,1 Hz, quelle hauteur minimale doit avoir l'appareil? Conclure.

EX 7 – Stabilisation d'un satellite par gradient de gravité

Un satellite AB , de centre d'inertie I , est modélisé par une haltère : deux masses m sont reliées par une barre rigide de masse négligeable de longueur $2a$. Il décrit une trajectoire circulaire de rayon D , à vitesse angulaire ω , autour de la Terre de masse M_T centrée en O . Le référentiel géocentrique $Oxyz$ est supposé galiléen. Soit $\mathcal{R}'$ le référentiel $Ox'y'z$ tournant autour de l'axe Oz à la même vitesse angulaire que le satellite, qui évolue dans le plan Oxy . Ce dernier est repéré par rapport à l'axe Ox' par l'angle θ . L'étude est effectuée dans $\mathcal{R}'$ où I est fixe.



1. Établir l'expression de ω en fonction de D .
2. Montrer que la force de Coriolis n'intervient dans la rotation propre du satellite.
3. Montrer que le satellite subit un champ de gravitation différentielle. Sans calcul et à l'aide de schémas, déterminer la (les) position(s) d'équilibre et leur stabilité. Dans la suite on désire retrouver ces résultats par le calcul.
4. Montrer que le moment en I de la force d'inertie d'entraînement est nul.
5. Montrer que le moment en I des forces de gravitation peut se mettre sous la forme

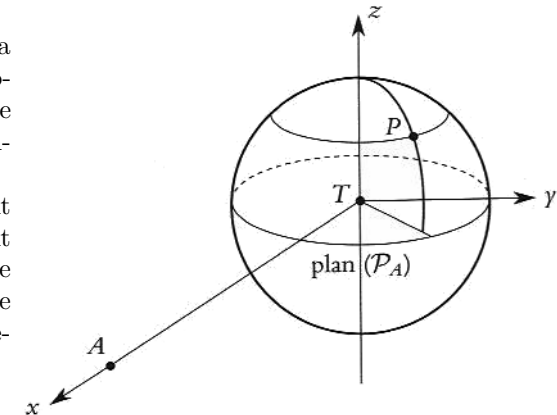
$$\vec{M}(I) = m\omega^2 D^3 \vec{IA} \wedge \vec{OI} \left(\frac{1}{OB^3} - \frac{1}{OA^3} \right)$$

6. En pratique $a \ll D$. En déduire une expression simplifiée au premier ordre en a/D de $\vec{M}(I)$ en fonction de θ .
7. Retrouver la (les) position(s) d'équilibre ainsi que leur stabilité. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ et exprimer la pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

EX 8 – Modèle statique des marées

On s'intéresse aux marées induites par la Lune ou le Soleil (masse M_A , centre A supposé fixe) sur la Terre (masse M_T , centre T , rayon R_T), dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$.

Soit $\mathcal{P}_A$ le plan dans lequel se déplacent T et A . On s'intéresse au mouvement d'un point $P(x, y, z)$ sur la sphère terrestre (schéma du repère ci-contre). Dans tout le problème on pourra naturellement considérer $TA \gg |x|, |y|, |z|, R_T$.



1. Établir le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à P dans $\mathcal{R}_G$ en considérant notamment une force de contact $\vec{F}$. On introduira le champ gravitationnel différentiel du à l'astre A au point P , noté $\vec{C}_A(P) = \vec{G}_A(P) - \vec{G}_A(T)$.

2. Montrer par un développement limité au premier ordre utile que

$$\vec{C}_A(P) \approx -\frac{\mathcal{G}M_A}{TA^2} \left(-\frac{2x}{TA} \vec{u}_x + \frac{y}{TA} \vec{u}_y + \frac{z}{TA} \vec{u}_z \right)$$

3. Représenter sur un schéma le champ $\vec{C}_A(P)$ aux 4 points suivants du plan $\mathcal{P}_A$: $P_1(R_T, 0, 0)$, $P_2(0, R_T, 0)$, $P_3(-R_T, 0, 0)$ et $P_4(0, -R_T, 0)$.
4. Montrer que le champ différentiel dérive de l'énergie potentielle

$$E_{p_A}(P) = \frac{\mathcal{G}mM_A}{2TA^3} (-2x^2 + y^2 + z^2)$$

5. On introduit l'angle zénithal de A en P , à savoir l'angle $Z_A(P) = \widehat{(\vec{TP}, \vec{TA})}$. Montrer que

$$E_{p_A}(P) = \frac{\mathcal{G}mM_A R_T^2}{2TA^3} (1 - 3\cos^2(Z_A(P)))$$

6. Dans l'hypothèse d'une Terre homogène soumise uniquement à la gravitation, la surface serait sphérique de rayon R_T . Sous cette hypothèse de sphéricité le champ gravitationnel de la Terre est central et de norme g_0 au voisinage de la surface. Exprimer l'énergie potentielle totale $E_p(P)$ dans $\mathcal{R}_G$ d'un point P situé à l'altitude h par rapport au rayon moyen R_T (avec $|h| \ll R_T$).
7. Si la Terre était totalement fluide en surface, sa forme serait celle d'une surface équipotentielle $E_p(P) = \text{cte}$. En déduire l'amplitude maximale de variation $\Delta h = h_{\max} - h_{\min}$ de la hauteur d'eau sur le globe terrestre. Faire l'application numérique pour la Lune et le Soleil. Commenter.

Données : $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg, $R_T = 6,4 \times 10^3$ km, pour la Lune $M_L = 7,4 \times 10^{22}$ kg et $TL = 3,8 \times 10^5$ km, pour le Soleil $M_S = 2 \times 10^{30}$ kg et $TS = 1,5 \times 10^8$ km, champ gravitationnel en surface de la Terre $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

EX 9 – Usure des rails

Tous les ans, sur chaque voie ferrée les 2 rails sont échangés par les agents de maintenance des voies TGV afin d'éviter une usure trop asymétrique. L'objectif de cet exercice est de comprendre l'origine de ce phénomène. Pour cela, on imagine une rame de TGV circulant dans la direction nord-sud en un lieu de latitude $\lambda = 60^\circ$ nord.

1. Évaluer numériquement la force qui est responsable de l'usure asymétrique des rails. De quel côté du rail a lieu cette usure ?
2. De quel angle faudrait-il incliner le plan des rails sur l'horizon si l'on voulait que la réaction des rails soit rigoureusement perpendiculaire à ce plan ?

EX 10 – Déviation vers l'Est

Le référentiel géocentrique est supposé galiléen, et on note Ω la vitesse angulaire de la Terre dans ce référentiel. Nous utilisons un repère local $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ défini pour une latitude λ et une longitude données par une origine O à la surface, l'axe Ox selon la direction Nord-Sud, et l'axe Oz selon la verticale. Une bille est lâchée de la position $(0, 0, z = h = 100 \text{ m})$ sans vitesse initiale. Le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ est supposé localement uniforme dans la zone de l'expérience. Les frottements de l'air sont négligés.

1. Par analyse dimensionnelle, déterminer le temps caractéristique τ de la chute. Le comparer à la durée du jour.
2. Projeter l'équation du mouvement de la bille et établir les équations différentielles vérifiées par $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
3. Évaluer l'ordre de grandeur Δx , Δy et Δz des variations selon les directions respectives, en fonction de τ et Ω . Les comparer entre elles et en déduire un système différentiel simplifié.
4. Dans quelle direction s'effectue la déviation principale par rapport à la verticale Oz ? Dépend-elle de l'hémisphère dans lequel s'effectue l'expérience ? Dans quelle direction s'effectue la déviation supplémentaire ? Dépend-elle de l'hémisphère ? Estimer numériquement ces deux déviations Δx et Δy et commenter.

EX 11 – Pendule de Foucault

On s'intéresse au mouvement d'un pendule simple constitué d'une masse $m = 300$ kg suspendue à l'extrémité d'un filin de masse négligeable et de longueur $\ell = 67$ m. L'autre extrémité du filin est accrochée à un point fixe par rapport au sol, situé à une hauteur égale à ℓ . À l'instant initial, on écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha = 5^\circ$ dans le plan méridien et on l'abandonne sans vitesse initiale. En un point P de latitude λ , on utilise le repère cartésien $Pxyz$ en prenant Pz selon la direction verticale du lieu et Px selon la direction Ouest-Est.

1. On suppose dans un premier temps que le référentiel terrestre est galiléen.
 - a) Montrer que le mouvement s'effectue dans un plan que l'on précisera.
 - b) Établir l'équation horaire du mouvement en donnant l'expression de l'angle $\theta(t)$ entre le filin et la verticale. On notera ω_0 la pulsation propre.
 - c) Calculer les amplitudes maximales des positions, des vitesses et des accélérations dans les deux directions où s'effectue le mouvement.
2. On tient maintenant compte de la rotation propre de la Terre. Évaluer l'ordre de grandeur de la correction à apporter, et montrer qu'elle est petite. Qu'en est-il sur l'équateur ?
3. Expliciter les équations du mouvement dans la base proposée. En linéarisant la tension du filin, montrer qu'au premier ordre utile $T = mg$.
4. En justifiant l'approximation, montrer que le mouvement horizontal satisfait approximativement

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega \sin \lambda \dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2\omega \sin \lambda \dot{x} + \omega_0^2 y = 0 \end{cases}$$

5. Résoudre ce système en introduisant la variable complexe $\underline{\zeta} = x + iy$. Interpréter.
6. Déterminer la durée d'un tour complet du plan d'oscillations à la latitude $\lambda = 48^\circ 51'$ (Paris). Cette expérience a été réalisée sous la coupole du Panthéon en 1852 par Léon Foucault, qui mesura une période de 31h46min. Commenter.
7. Comparer avec les périodes à l'équateur et aux pôles. Ce résultat dépend-il de l'hémisphère dans lequel est réalisée l'expérience ?