

Magnétostatique

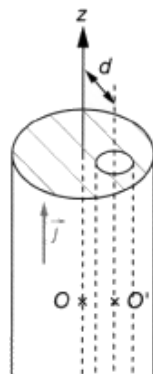
EX 1 – Champ dans un fil creux

Un conducteur cylindrique creux de rayon R , de dimension infinie selon l'axe (Oz) , est parcouru par un courant d'intensité constante I réparti uniformément dans la section. Dans le cylindre, une cavité cylindrique de rayon a et d'axe $(O'z)$ parallèle à (Oz) a été aménagée, avec O' à la distance d de (Oz) telle que $d + a < R$.

Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.

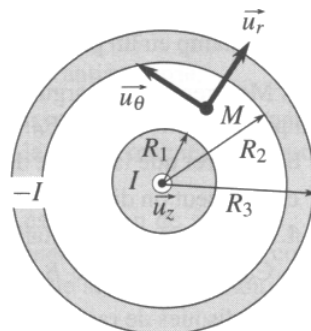
Montrer qu'il est uniforme à l'intérieur de la cavité.

Qu'en est-il si $d = 0$?



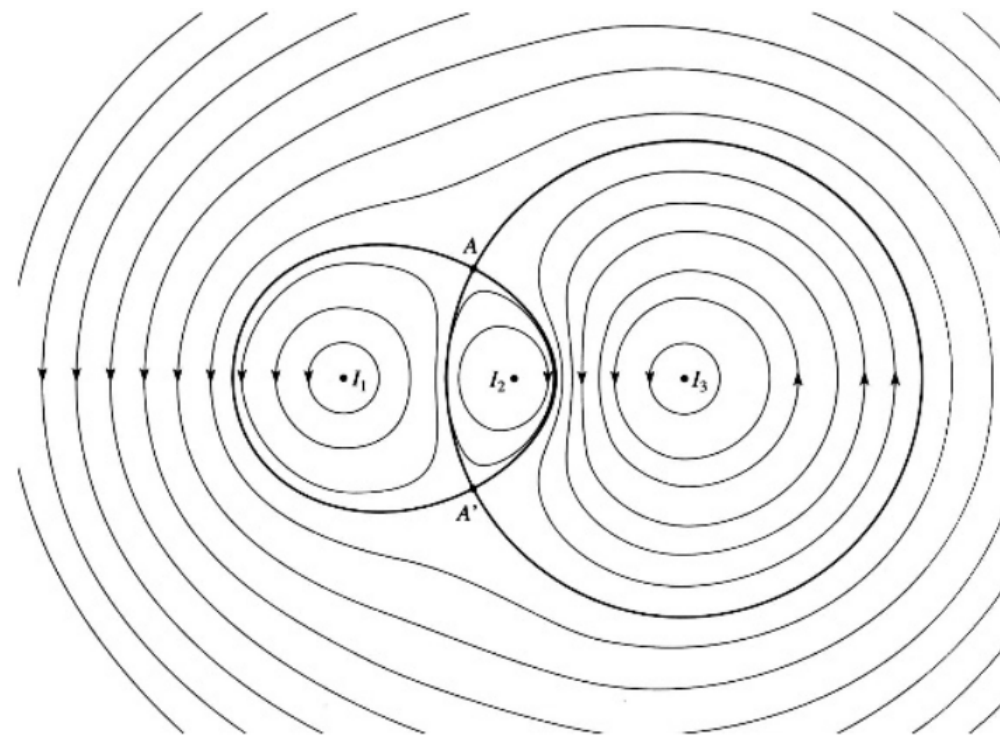
EX 2 – Champ créé par un câble coaxial

On considère un câble coaxial cylindrique de longueur supposée infinie, constitué d'un conducteur central plein (l'âme) de rayon R_1 , parcouru par un courant uniforme d'intensité I et d'un conducteur périphérique évidé (la tresse), de rayon intérieur R_2 , de rayon extérieur R_3 avec $R_1 < R_2 < R_3$ et parcouru par un courant uniforme également d'intensité I mais circulant en sens inverse par rapport au courant conducteur central.



1. Relier les courants volumiques $\vec{j}_a$ et $\vec{j}_t$ respectivement dans l'âme et dans le cœur au courant total I .
2. Exprimer le champ magnétostatique créé en tout point de l'espace. Représenter sa norme en fonction de la distance r à l'axe Oz .
3. On suppose la tresse très fine, c'est-à-dire $R_3 = R_2 + e$ avec $e \ll R_2$. Comment pourrait-on définir un vecteur densité surfacique de courant $\vec{j}_s$ en fonction du vecteur réel volumique $\vec{j}_t$? Quelle est sa relation à I ? Comment se trouve modifié le profil du champ en fonction de r ?
4. On se place désormais dans l'approximation surfacique de ce courant externe, avec $R_3 \approx R_2$. Exprimer l'énergie magnétique totale stockée dans une longueur h de câble.
5. En déduire, par analogie avec le cas d'une bobine, l'expression de l'inductance propre L d'une portion de longueur h du câble. Calculer l'inductance linéique ℓ pour $R_1 = 0,65 \text{ mm}$, $R_2 = 2,35 \text{ mm}$.

EX 3 – Analyse d'une carte de champ



On représente ci-dessus des lignes du champ magnétique créé par trois fils infiniment longs, perpendiculaires au plan du schéma, parcourus par les courants I_1 , I_2 et I_3 .

1. Déterminer sans aucun calcul le signe de I_1 , I_2 et I_3 et celui de la somme $I_1 + I_2 + I_3$.
2. Quelle est la valeur du champ B en A et en A' ?
3. Soit $|I_2| = 1 \text{ A}$, en déduire une valeur approchée de I_1 et I_3 .

EX 4 – Nappe de courant plane

Dans le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on modélise une nappe de courant d'épaisseur a sur un conducteur très étendu par la distribution volumique $\vec{j}(M) = j_0 \vec{u}_y$ si $|z| \leq a/2$ et $\vec{j} = \vec{0}$ sinon.

1. Calculer le champ magnétique dans tout l'espace à l'aide du Théorème d'Ampère.
2. Comment évolue le champ au voisinage de la nappe lorsque $a \rightarrow 0$ en comparaison de l'échelle spatiale pertinente du problème ?
3. Retrouvez ces résultats à partir de l'équation locale de Maxwell-Ampère.

EX 5 – Nappe de courant orthoradiale

On modélise un solénoïde d'axe (Oz) et d'épaisseur non nulle par une nappe orthoradiale de courant volumique infinie selon (Oz) : $\vec{j}(M) = j_0 \vec{u}_\theta$ si $r \in [R, R + e]$ et $\vec{j} = \vec{0}$ sinon (en coordonnées et dans la base cylindriques).

1. Rappeler pour quelle raison on peut considérer que le champ magnétique est nul pour $r > R + e$.
2. Calculer le champ magnétique dans tout le reste de l'espace à l'aide du théorème d'Ampère. Faire le lien avec le modèle usuel du solénoïde infini défini par son nombre de spires par unité de longueur.
3. Retrouver ces résultats à partir de l'équation locale de Maxwell-Ampère (on pourra utiliser le formulaire).

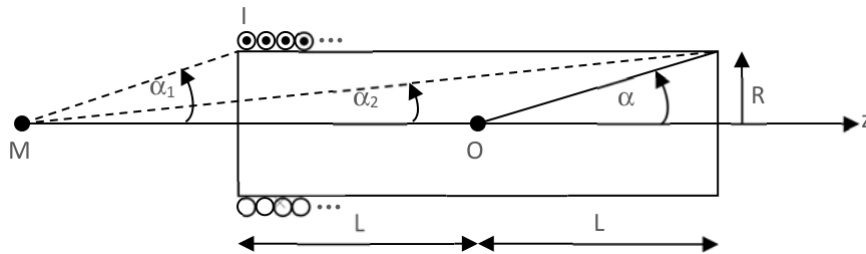
EX 6 – Solénoïde à champ magnétique élevé

On cherche à obtenir au centre d'un solénoïde un champ magnétique de l'ordre de 10 T. On donne ci-dessous les contraintes de section imposées par l'effet Joule.

Section (mm ²)	1	1.5	2.5	4	6	10	16	25	35	50	70	95	120	150
Intensité max (A)	8	12	17	22	29	40	54	71	87	105	135	165	190	220

Le champ créé par un solénoïde de longueur $2L$, de rayon R , comportant n_1 spires par unité de longueur, parcouru par un courant I , en un point M de son axe se calcule par la loi de Bio et Savart¹. On obtient :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n_1 I}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{e}_z$$

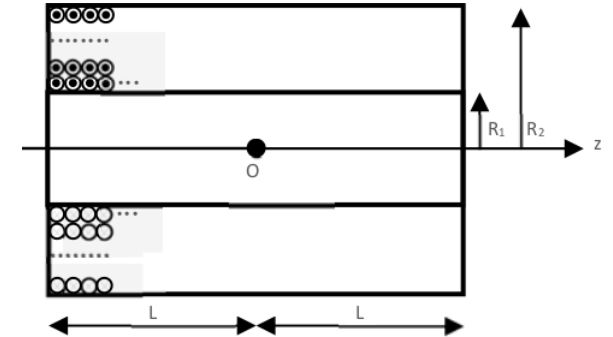


1. Commenter cette expression relativement aux propriétés de symétries attendues. Retrouve-t-on l'expression connue pour un solénoïde infini ?
2. Déterminer le champ créé en O . En déduire l'ordre de grandeur de l'intensité I en proposant des ordres de grandeur raisonnables pour les valeurs numériques manquantes et en considérant la géométrie $L = R_2 = 2R_1$. Commenter.

1. Hors Programme

Suite à l'étude précédente, on propose de faire plusieurs séries d'enroulement sur le solénoïde afin toujours d'obtenir un champ magnétique de 10 T en O .

On doit donc tenir compte maintenant de l'épaisseur du solénoïde. Celui-ci est constitué d'un grand nombre de spires superposées, chaque nappe ayant la structure du solénoïde de la première question. On note n_2 le nombre de spires par unités d'épaisseur, R_1 son rayon intérieur et R_2 son rayon extérieur.



3. Calculer le champ magnétique B_0 créée en O en fonction de n_1 , n_2 , I , L , R_1 et R_2 . On donne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + \text{cte}$$

4. On se restreint à la géométrie simple $L = R_2 = 2R_1$. Les contraintes expérimentales imposant $I = 20$ A, montrer que le produit $n_1 n_2$ est majoré et L est minoré et exprimer ces limites.
5. En prenant ces valeurs limites, calculer le nombre total de spires dans la bobine. Quelle est alors la longueur du fil ? Le dispositif est-il réalisable ? Sinon que faire ?

EX 7 – Champ dans un bloc conducteur

Un fil conducteur filiforme rectiligne aligné avec l'axe (Oz) pour $z < 0$ est parcouru par un courant I . Au point origine O , le fil pénètre dans un bloc massif conducteur homogène que nous considérerons infini selon x , y , et $z > 0$. Dans le bloc, on suppose que la distribution de courant est radiale de centre O et isotrope : $\vec{j}(M) = j(r) \vec{u}_r$ en notant $r = OM$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{OM}$.

Déterminer le champ magnétique dans tout le demi-espace $z > 0$.

EX 8 – Champ magnétique au voisinage d'un axe d'anti-symétrie des courants

On considère une spire circulaire de rayon R , de centre O , parcourue par un courant d'intensité I , d'axe de révolution (Oz) .

1. Justifier qu'en un point M quelconque, le champ magnétique prend nécessairement la forme suivante en coordonnées et dans la base cylindriques :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$$

Montrer que nécessairement en tout point de l'axe (Oz) , $B_r(r = 0, z) = 0$.

Le calcul direct du champ sur l'axe (Oz) donne :

$$B_z(r=0, z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

2. On cherche à exprimer $B_r(r, z)$ lorsque $\frac{r}{R} \ll 1$. En utilisant la conservation du flux de $\vec{B}$, montrer que la composante radiale a pour expression approchée :

$$B_r(r, z) \approx -\frac{r}{2} \frac{dB_z(r=0, z)}{dz}$$

3. En déduire explicitement la forme approchée de $B_r(r, z)$ au voisinage de l'axe. Tracer l'allure des lignes de champ au voisinage de l'axe.

EX 9 – Champ créé par un faisceau cylindrique d'électrons

Un faisceau électronique a la forme d'un cylindre très long de rayon R et d'axe (Oz). Les électrons ont tous la même vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_z$, et ils sont uniformément répartis avec une densité de n électrons par unité de volume.

- Après avoir exprimé les densités volumiques de charge et de courant, établir l'expression des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans tout l'espace.
- Le faisceau peut-il rester cylindrique ?

EX 10 – Effet Meissner dans un supraconducteur

Lorsqu'on applique un champ magnétique d'origine extérieure à un corps supraconducteur, on constate expérimentalement qu'il tend à expulser les lignes de champ magnétique (effet *Meissner*, 1933, aussi appelé diamagnétisme² parfait) en créant des courants localisés au voisinage de sa surface pour compenser le champ $\vec{B}_e$ qui lui est appliqué. Pour rendre compte de cet effet, on admet que dans un supraconducteur, la loi d'Ohm est remplacée en régime statique par la relation phénoménologique de London

$$\vec{\text{rot}} \vec{j} = -\lambda \vec{B},$$

où λ est une constante positive.

On rappelle l'identité suivante entre les opérateurs s'appliquant à un champ de vecteurs $\vec{A}(M) = A_x(M)\vec{u}_x + A_y(M)\vec{u}_y + A_z(M)\vec{u}_z$:

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad \text{avec} \quad \Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z$$

le laplacien vectoriel.

2. Le diamagnétisme est la propriété des corps qui ont tendance à contre-réagir à l'application d'un champ magnétique d'origine extérieure, en s'aimantant dans le sens contraire de ce champ (au contraire des matériaux paramagnétiques et ferromagnétiques). Cet effet est la plupart du temps très faible et négligeable si bien que le matériau est considéré « amagnétique ». Dans les conducteurs et supraconducteurs, l'effet est particulièrement important puisqu'il conduit à une difficulté de pénétration plus ou moins forte du champ dans le milieu.

- Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\vec{j}$ et celle vérifiée par $\vec{B}$. Introduire une distance caractéristique δ qui s'exprime en fonction des constantes du problème.

L'expérience montre que δ est de l'ordre de la dizaine de nanomètres. On considère maintenant un milieu supraconducteur occupant tout le demi-espace $z > 0$. Une source extérieure impose au voisinage de sa surface un champ magnétique $\vec{B}(z < 0) = B_0 \vec{u}_x$.

- Après avoir pris en compte les invariances du problème, déterminer le champ $\vec{B}$ et la densité de courant $\vec{j}$ en tout point du supraconducteur ($z > 0$). Représenter graphiquement les solutions. Cela est-il conforme à l'effet Meissner ?
- Montrer que le supraconducteur ne modifie pas le champ appliqué à l'extérieur en déterminant le champ magnétique créé par $\vec{j}$ à l'extérieur du supraconducteur.
- Calculer la force de Laplace par unité de surface subie par une colonne de supraconducteur d'extension infinie selon Oz . Quelle quantité retrouve-t-on ?

EX 11 – Interaction entre deux dipôles magnétiques

On rappelle le champ magnétique créé en un point P par un dipôle de moment dipolaire $\vec{M}$ placé en A :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi AP^5} \left(3(\vec{M} \cdot \vec{AP})\vec{AP} - AP^2 \vec{M} \right)$$

Deux dipôles de moments $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ sont respectivement placés en O et M .

- Exprimer l'énergie potentielle d'interaction des deux dipôles en fonction de $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{OM}$ et OM .
- On suppose tout d'abord que $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ sont colinéaires à $\vec{OM}$. Exprimer la force entre les dipôles. À quelle condition est-elle attractive ?
- Même question en considérant que $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ sont colinéaires entre eux et perpendiculaires à $\vec{OM}$.
- Déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie d'interaction entre deux atomes possédant un moment magnétique. À quelle température cette énergie est-elle de l'ordre de grandeur de l'énergie d'agitation thermique $k_B T$? Conclure quant à l'origine microscopique des propriétés magnétiques de la matière.

EX 12 – Dipôle magnétique en mouvement sur l'axe d'une bobine

Un dipôle magnétique de moment dipolaire $\vec{M}$ est disposé sur l'axe d'une bobine plate circulaire de rayon R , de N spires et parcourue par un courant d'intensité i . Le vecteur moment magnétique est contraint de rester toujours colinéaire à l'axe de la bobine. Calculer la force exercée et la période des oscillations du dipôle de masse m au voisinage de sa position d'équilibre.

On donne le champ créé par une spire de rayon R sur son axe $\vec{u}_z$, en un point M tel que la spire soit vue sous un angle 2α : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z$.