

OEM - Milieux matériels et Interfaces

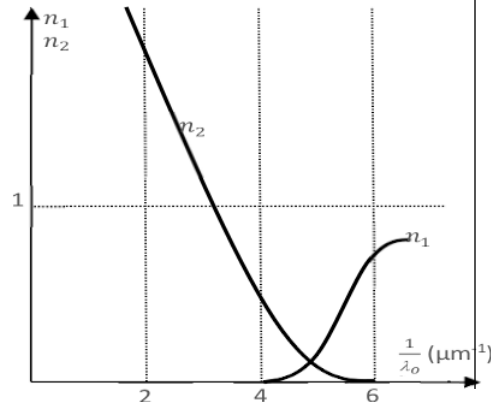
Données utiles pour les exercices :

- Masse de l'électron : $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg.
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \times 10^8$ m.s⁻¹.
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m⁻¹.
- Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23}$ mol⁻¹.

EX 1 – Propagation dans un milieu métallique

Pour étudier la propagation d'OEM dans un milieu bon conducteur de type métallique, on adopte un modèle d'électrons libre, de masse m , de charge $-e$ et de densité particulière n_e , pouvant se mouvoir sous l'effet du champ électromagnétique de l'OEM. On introduit le temps caractéristique τ d'interaction avec le réseau cristallin dans le modèle de Drude, caractérisant la conductivité statique, supposé de l'ordre de 10^{-14} s.

1. Définir et exprimer une conductivité complexe $\underline{\sigma}$ qui dépend de la pulsation ω .
2. Établir la relation de dispersion des OEMPPM se propageant dans le milieu conducteur. Définir la permittivité diélectrique complexe $\underline{\epsilon}_r$ équivalente du milieu, ainsi que son indice $\underline{n} = n_1 - in_2$.
3. Dans quelle gamme de fréquences peut-on assimiler la conductivité à sa valeur statique σ_0 ? Quel phénomène accompagne la propagation de l'OPPM dans ce domaine spectral?
4. On s'intéresse maintenant à la propagation des fréquences pour lesquelles les phénomènes dissipatifs peuvent être négligés.
 - a) De quelle gamme de fréquences s'agit-il? Expliciter l'indice complexe du milieu dans ce domaine d'approximation. On pourra introduire la pulsation plasma du métal : $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m}}$. Dans quel domaine se situe la fréquence plasma f_p ?
 - b) Tracer l'allure des variations des parties réelle et imaginaire n_1 et n_2 de l'indice, en fonction de la longueur d'onde dans le vide $\frac{1}{\lambda_0}$.
 - c) On indique, pour le sodium, les courbes expérimentales suivantes. Commenter ces résultats en les comparant aux courbes théoriques tracées précédemment. Quel est le comportement du sodium dans l'U.V lointain?
 - d) Évaluer la fréquence plasma f_p , puis la densité d'électrons libres n_0 du sodium. Commenter cette valeur sachant que la masse volumique du sodium métallique vaut $\mu = 0,97$ t.m⁻³, et sa masse molaire $M = 23$ g.mol⁻¹.



EX 2 – Dispersion et absorption dans un diélectrique - Loi de Cauchy

En présence d'une OEMPPM de pulsation ω , un milieu diélectrique est le siège de courants de polarisation, c'est-à-dire d'oscillations des électrons liés aux noyaux. Pour de faibles intensités le régime est linéaire, et l'électron situé en M subit une force de rappel de type élastique qui le ramène vers sa position d'équilibre stable¹ O : $\vec{F}_e = -m\omega_0^2 \vec{OM}$ où ω_0 représente la pulsation propre de cet oscillateur. Les oscillations de l'électron engendrent un rayonnement électromagnétique qui est traduit par une force de frottement fluide $\vec{F}_r = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ où $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$. On suppose que tous les électrons en jeu dans cette polarisation sont représentés par les mêmes constantes ω_0 et τ (la généralisation ne posant pas de problème particulier), et que leur densité volumique est n_0 . On suppose que les fréquences en jeu sont telles que la longueur d'onde de l'onde reste grande devant la distance inter-atomique. On suppose le milieu suffisamment peu dense pour pouvoir assimiler le champ local à l'échelle atomique à sa moyenne spatiale sur un grand nombre d'atomes, qui correspond au champ de l'onde.

1. On modélise l'atome comme une boule de rayon a constituée d'une charge ponctuelle Ze située en son centre O et d'une charge négative $-Ze$ uniformément répartie. Montrer qu'en cas de petit écart par rapport à sa position d'équilibre $\vec{OM}$, le noyau subit une force $-\kappa \vec{OM}$ et exprimer κ . En déduire que $\omega_0 = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m}}$ et calculer son ordre de grandeur. Dans quel domaine spectral se situe-t-elle?
2. À quelle condition peut-on négliger la force magnétique? On supposera cette condition établie par la suite. Établir l'expression de ce que l'on peut appeler la *mobilité complexe* $\underline{\mu}$, reliant la vitesse $\vec{v}$ au champ local de l'onde $\vec{E}$, en fonction de ω et des constantes nécessaires. En déduire l'expression du courant de polarisation $\vec{j}_p$ en fonction de $\vec{E}$.
3. En déduire la relation de dispersion pour des OPPH éventuellement amorties. Définir la permittivité diélectrique relative complexe $\underline{\epsilon}_r$ et l'exprimer en fonction de ω , ω_0 , τ et la pulsation plasma ω_p associée aux électrons liés. Sachant que le facteur de qualité lié à τ est en général de l'ordre de 10^5 , au voisinage de quelle pulsation observera-t-on une résonance en polarisation (c'est-à-dire en déplacement de l'électron)?
4. Pour se faire une idée, on suppose donc que $\tau \rightarrow \infty$ et on raisonne sur l'expression ainsi approchée de $\underline{\epsilon}_r$. On note $\underline{n} = n_1 - in_2$ l'indice complexe associé. En déduire les expressions approchées de n_1 et n_2 en fonction du domaine de ω . Tracer l'allure de $n_1(\omega)$ et $n_2(\omega)$ sur le même graphe, et expliciter le comportement du milieu vis-à-vis de l'OPPM sur chaque domaine. Pourquoi dit-on que le diélectrique agit comme un filtre réjecteur de bande? Quelles sont ses pulsations de coupure? Que vaut la vitesse de phase aux limites basse et haute fréquence?
5. Les courbes plus réalistes sans approximation sont représentées ci-dessous.

1. En réalité celui-ci étant en orbite, il s'agit plutôt de décrire l'évolution de sa position moyenne.

Identifier chaque courbe au regard de l'analyse précédente. Établir la relation générale suivante reliant la vitesse de groupe à la célérité dans le vide c :

$$v_g = \frac{c}{n_1 + \omega \frac{dn_1}{d\omega}}$$

Au vu des courbes ci-contre, montrer que v_g peut être supérieure à la vitesse de phase et même à c (auquel cas elle n'a pas de signification physique), et indiquer dans quelle zone de pulsations.

6. On se place maintenant dans le domaine $\omega \ll \omega_0$, si bien qu'il n'y a quasiment pas d'absorption. Montrer alors à l'aide de l'expression trouvée en 4. que dans le visible, le milieu vérifie approximativement la loi de Cauchy en fonction de la longueur d'onde dans le vide λ_0 ,

$$n_1^2 \approx A + \frac{B}{\lambda_0^2} \quad \text{ou encore} \quad n_1 \approx A' + \frac{B'}{\lambda_0^2}$$

et exprimer les constantes A et B , A' et B' .

EX 3 – Oscillations de Plasma longitudinales

On considère un plasma neutre formé d'ions positifs (charge $+e$, masse M) et d'électrons (charge $-e$, masse m) de même densité n_0 . Celui-ci subit une perturbation locale à partir d'une distribution uniforme d'équilibre. Les ions positifs, très inertes, restent quasiment immobiles mais les électrons oscillent selon la direction Ox . On souhaite établir l'expression de la pulsation des oscillations libres du plasma. On considère le problème invariant selon y et z .

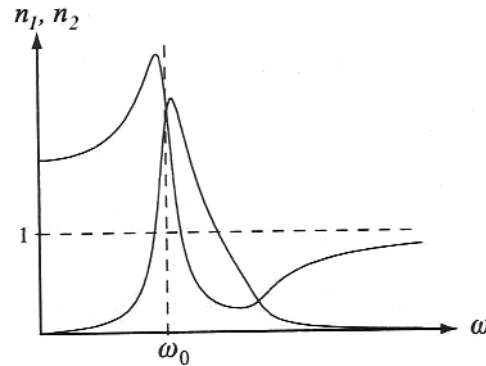
1. On note $s(x, t)$ le déplacement longitudinal moyen à l'instant t des électrons qui étaient situés en x en l'absence de perturbation. Ces mouvements engendrent une modification de la densité particulière locale $n(x, t)$ des électrons. En considérant la conservation du nombre d'électrons, montrer que

$$n(x, t) = \frac{n_0}{1 + \frac{\partial s}{\partial x}(x, t)}$$

Linéariser cette expression en considérant de petites perturbations.

En déduire la relation entre la densité volumique de charge $\rho(x, t)$ et $s(x, t)$.

2. Cette perturbation de la neutralité engendre un champ électrique qui prend la forme $\vec{E} = E(x, t) \vec{u}_x$. Justifier cette forme mathématique, puis trouver une relation de proportionnalité entre $E(x, t)$ et $s(x, t)$.
3. En étudiant le mouvement d'un électron, en déduire la pulsation des oscillations libres. Que retrouve-t-on ? Comment peut-on caractériser la perturbation $\vec{E}(x, t)$ d'un point-de-vue ondulatoire ?



EX 4 – Pouvoir rotatoire

Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ , polarisée rectilignement, pénètre dans une cuve de longueur ℓ contenant une substance optiquement active. Cette substance transmet deux polarisations particulières sans altération (absorption négligée) :

- une polarisation circulaire gauche avec une vitesse de propagation $v_g = \frac{c}{n_g}$ où n_g est l'indice du milieu pour les ondes circulaires gauches ;
- une polarisation circulaire droite avec une vitesse de propagation $v_d = \frac{c}{n_d}$ où n_d est l'indice du milieu pour les ondes circulaires droites.

1. Caractériser la polarisation de l'onde à la fin de la traversée.
2. Proposer un dispositif expérimental permettant l'étude de cette propriété. Donner des exemples de substances douées d'un pouvoir rotatoire.

EX 5 – Pouvoir rotatoire magnétique dans un plasma

On s'intéresse à l'influence d'un champ magnétique stationnaire d'origine externe sur la propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma. C'est le cas par exemple dans l'ionosphère en présence du champ magnétique terrestre. Plus spécifiquement on étudie le cas où le champ magnétique est longitudinal par rapport à la propagation des ondes.

Un plasma neutre formé d'ions positifs (charge $+e$, masse M) et d'électrons (charge $-e$, masse m) de densité commune n , occupe la portion d'espace située entre deux plans parallèles distants de ℓ et orthogonaux à la direction de propagation (Ox). Un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}_e = B_e \vec{u}_x$ ($B_0 > 0$) est appliqué, supposé d'un ordre de grandeur nettement supérieur à celui de l'onde. Une OPPH supposée transverse pénètre dans le milieu, décrite par le champ électrique

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

On ne s'intéressera pas ici aux coefficients de réflexion ou de transmission associés au changement de milieu en entrée ou sortie.

1. Montrer que la présence du champ $\vec{B}_0$ induit, en régime sinusoïdal forcé, une loi d'Ohm complexe matricielle en deux dimensions,

$$\vec{j} = [\underline{\Gamma}] \vec{E}$$

où $[\underline{\Gamma}]$ est une matrice 2×2 à coefficient dans $\mathbb{C}$ que l'on explicitera en fonction notamment de la pulsation plasma ω_p , et de la pulsation cyclotron ω_c associée à B_0 . On pourra négliger le mouvement des cations.

2. Montrer que les éléments propres de $[\underline{\Gamma}]$ sont des OPPH de polarisation circulaire (PC) droite et gauche. En déduire pour chaque cas (PCD et PCG), la relation de dispersion associée.

3. Représenter dans chaque cas l'allure de cette relation de dispersion en indiquant les valeurs particulières. Préciser en fonction du domaine de valeur de ω si l'onde peut traverser le plasma, et si elle est amortie.
4. On considère maintenant que l'OPPH est polarisée rectilignement (PR). Montrer qu'elle peut se décomposer comme une somme d'une OPPH PCD et d'une OPPH PCG. Caractériser alors l'onde en sortie de plasma en fonction du domaine de valeur de ω .
Dans le cas où l'onde émerge en étant toujours PR, montrer que son plan de polarisation a tourné d'un angle $\alpha = K B_1$, et exprimer la *constante de Verdet* K .

EX 6 – Radar Doppler

Une plaque métallique plane verticale de normale $\vec{e}_x$, supposée illimitée et parfaitement conductrice, est en translation à la vitesse horizontale constante $\vec{V} = V\vec{e}_x$ supposée non relativiste, dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Une OEMPPM PR selon $\vec{u}_y$, de pulsation ω_i est émise par le radar en direction de cette plaque, sous incidence normale. On note $\vec{E}$ et $\vec{B}$ les champs associés à cette onde dans le référentiel $\mathcal{R}$.

1. Montrer que dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la plaque, le champ électrique s'écrit $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}$, et le champ magnétique² $\vec{B}' = \vec{B}$.
2. Que doit valoir le champ électrique total dans le métal s'il est supposé parfaitement conducteur ? Justifier succinctement. En déduire, dans $\mathcal{R}$, la pulsation ω_r et l'amplitude E_{0r} de l'onde réfléchie en fonction de celles de l'onde incidente. Commenter.
3. Un radar de gendarmerie émet sur 2,5 GHz et contrôle une automobile. L'écart $\Delta\nu$ entre fréquences émise et reçue vaut 0,5 kHz. Déterminer la vitesse de la voiture, et proposer un dispositif électronique capable de mesurer $\Delta\nu$, utilisant un multiplieur et un filtre. Pourquoi ne travaille-t-on pas avec des ondes radio/hertziennes ?

EX 7 – Analyse d'une polarisation

Une OPPH de longueur d'onde dans le vide λ_0 se propage dans l'air selon Oz. Un polariseur est placé dans le plan $z = 0$, de direction de transmission $\vec{u}$. On pose $\alpha = (\vec{u}_x; \vec{u})$ orienté par rapport à $\vec{u}_z$. Dans tout l'exercice on omettra d'éventuels coefficients de transmission et de réflexion.

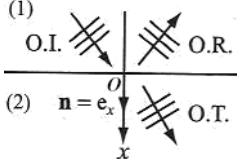
1. Exprimer l'éclairement en sortie de polariseur en fonction de α et de l'amplitude de chaque composante du champ, dans le cas d'une PR selon $\vec{u}_x$, puis dans le cas d'un PE de grand axe et petit axe confondus avec $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. On pourra introduire une constante de proportionnalité K qu'on ne cherchera pas à exprimer. De quel(s) paramètre(s) physique(s) dépend K ?

2. Ce résultat est approximatif en relativité car $\vec{B}'$ est corrigé en $\frac{V^2}{c^2}$.

2. On remplace le polariseur par une lame quart d'onde d'épaisseur e supposée totalement transparente, dont les lignes neutres sont parallèles à Ox (axe lent) et Oy (axe rapide). L'onde est PE, identique à celle de la question précédente. Expliciter le champ électrique en sortie de lame.
Peut-on alors obtenir un minimum d'intensité avec un polariseur placé en arrière (pour la lumière) ? Si oui pour quel angle α exprimé en fonction des composantes E_{0x} et E_{0y} du champ ? Est-ce une extinction totale ?

EX 8 – Loi de Descartes - Polarisation par réflexion vitreuse

On considère un dioptre plan infini confondu avec le plan Oyz (1) séparant deux milieux diélectriques d'indice n_1 et n_2 . Une OPPH incidente de pulsation ω_i issue du milieu (1) se propage vers le dioptre avec un vecteur d'onde $\vec{k}_i$ formant un angle dit *d'incidence* $i_1 = (\vec{n}; \vec{k}_i)$ avec $\vec{n} = \vec{u}_x$ la normale au dioptre.



Il en résulte l'apparition d'une onde réfléchie et d'une onde transmise. Les conditions limite et les milieux étant linéaires, on travaille en notation complexe et on écrit en $(t, \vec{r} = \overrightarrow{OM})$ les trois champs électriques sous la forme

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{i(\omega_i t - \vec{k}_i \vec{r})} ; \quad \vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{i(\omega_t t - \vec{k}_t \vec{r})} .$$

On définit de même les angles $i_2 = (\vec{n}; \vec{k}_t)$ et $r = (\vec{n}; \vec{k}_r)$

1. En écrivant les conditions de continuité des composantes tangentielles³ des champs sur le dioptre, montrer que l'on a nécessairement

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega , \quad \text{et} \quad \vec{k}_i \vec{r} = \vec{k}_r \vec{r} = \vec{k}_t \vec{r} \quad \forall \vec{r} \quad \text{si} \quad x = 0 ,$$

2. En déduire les trois lois de Descartes, après avoir défini vectoriellement le plan d'incidence.
3. On considère une onde incidente polarisée rectilignement dans le plan d'incidence, que nous supposons être Oxy . Faire un schéma des vecteurs d'onde et des champs à un instant t , puis projeter les équations de continuité écrites précédemment sous la forme d'un système linéaire. En déduire les coefficients de réflexion $r_{\parallel}$ et de transmission⁴ $t_{\parallel}$ en fonction de i_1 et i_2 .
4. En déduire que pour une certaine incidence $i_1 = i_B$ que l'on exprimera en fonction des indices, dite *incidence de Brewster*, il n'y a pas d'onde réfléchie⁵. Que se passe-t-il alors si une OPPH polarisée différemment est incidente avec le même angle i_B ?

3. La composante normale du champ électrique n'est pas continue dans ce cas, mais cette relation n'est utile (et HPgm).

4. Le symbole $\parallel$ indique que la PR est dans le plan d'incidence. On utilisera $\perp$ dans le cas où la PR est orthogonale à ce plan. À traiter en exercice...

5. On remarquera que pour cette incidence particulière, on a $\vec{E}_t \parallel \vec{k}_r$. Ceci permet de comprendre l'absence d'onde réfléchie à l'aide des propriétés du rayonnement dipolaire (HPgm).

EX 9 – Pression de radiation - Voile solaire

Un métal de conductivité statique σ_0 occupe le demi-espace $x > 0$. Une OEMPPM PR de pulsation ω se propageant dans le vide selon x , incidente sur le métal sous incidence normale, donne lieu à une onde réfléchie et une onde transmise. On se place dans l'ARQS magnétique.

1. Après avoir rappelé la relation de dispersion dans le métal et défini son indice, déterminer les coefficients de réflexion et de transmission pour le champ électrique. On exprimera les résultats en fonction de ω , de $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$, et de l'épaisseur de peau δ . Qu'obtient-on à la limite du conducteur parfait ?
2. Déterminer la puissance dissipée par effet Joule $\mathcal{P}_J$ dans le métal par unité de surface en fonction des mêmes données et en fonction de la puissance surfacique incidente, sans passer par le calcul des courants. Donner une forme approchée sachant que la vitesse de phase vérifie $\delta\omega \ll c$.
3. On s'intéresse maintenant explicitement à l'effet des courants. En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, montrer que la pression moyenne $\langle P_r \rangle$ exercée par l'onde transmise sur le métal en raison des forces de Laplace est égale à la densité volumique d'énergie magnétique moyenne en $x = 0^+$.
4. En déduire, grâce à la question 1., que la pression de radiation vérifie

$$\langle P_r \rangle = \frac{4 \langle u_{em i} \rangle}{(1 + \frac{\delta\omega}{c})^2 + 1}$$

où $\langle u_{em i} \rangle$ est la densité volumique d'énergie électromagnétique incidente.

5. Que devient cette expression pour un métal parfait ? Retrouver cette expression par un raisonnement corpusculaire sur les photons. Comment serait alors modifiée cette pression en cas d'incidence oblique d'angle i ?
6. En déduire l'ordre de grandeur de la surface d'une voile solaire permettant de donner à une masse de 1 kg une accélération de 1 m.s^{-2} pour un vaisseau proche de la terre.

EX 10 – Guide d'onde rectangulaire

On considère un guide d'onde métallique formant un cylindre creux d'axe Oz et de section rectangulaire correspondant à $0 < x < a$ et $0 < y < b$. L'intérieur du guide est rempli d'air assimilé au vide. Pour les parois, on adopte le modèle du conducteur parfait, de conductivité infinie : seules les composantes respectivement tangentielle du champ électrique et normale du champ magnétique sont continues à l'entrée dans le métal. Les autres composantes peuvent induire des charges surfaciques (pour $\vec{E}_N$) et/ou des courants surfaciques (pour $\vec{B}_T$), mais ces relations ne seront pas utiles dans ce problème.

1. Montrer que pour un métal parfait, le champ électrique est nul dans le métal. Qu'en est-il du champ magnétique en l'absence de composante stationnaire imposée de l'extérieur ?

On étudie la propagation selon Oz d'OEM progressives monochromatiques de pulsation ω , telles que le champ électrique est polarisé rectilignement. Leur forme générale s'écrit

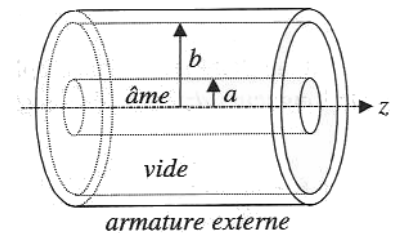
$$\vec{E} = f(x, y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_x$$

où $f(x, y)$ est une fonction réelle. On note c la célérité des OEMPP dans le vide en l'absence de guide d'onde.

2. Montrer que $f(x, y)$ ne dépend en fait pas de x .
3. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $f(y)$.
4. Déduire des conditions aux limites en y les modes propres possibles et leur structure. Montrer qu'on peut les indiquer par un entier n naturel non nul. Comment s'exprime ici la relation de dispersion associée à ces modes propres ? Que laissent prévoir les conditions aux limites en x ?
5. Calculer le champ magnétique associé à l'onde. Que remarque-t-on ? Pourquoi qualifie-t-on ces modes de Transverses Électriques⁶ (TE) ? Vérifier les conditions aux limites.
6. Exprimer la longueur d'onde λ_{gn} de chaque mode propre. Montrer que pour une fréquence f donnée, il existe un nombre maximal fini N de modes propres qui peuvent se propager. En déduire qu'il existe une fréquence de coupure f_c qu'on exprimera, en-dessous de laquelle il n'y a plus de propagation. Application numérique : calculer b pour que $f_c = 2,5 \text{ GHz}$.
7. Exprimer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g de l'onde en fonction de c , n et du rapport $\frac{f}{f_c}$. AN : calculer v_φ et v_g pour le premier mode propre en prenant la fréquence $f = 2f_c$.
8. En déduire le vecteur de Poynting moyenné sur le temps, puis la puissance surfacique moyennée sur le temps et la section droite, et enfin la vitesse de l'énergie.

EX 11 – Câble coaxial

On considère un câble coaxial, constitué d'une âme cylindrique pleine en métal parfait de section droite circulaire de rayon a , et d'une armature externe (tresse) creuse en métal parfait de surface intérieure cylindrique de section droite circulaire de rayon b , de même axe Oz que l'âme. Une onde Transverse Électro-Magnétique (TEM) se propage dans le vide (ou l'air) entre âme et armature parallèlement à Oz .



Compte tenu de la symétrie de révolution du problème (support, courants coaxiaux inversés dans l'âme et la tresse, charges surfaciques coaxiales en regard sur les deux armatures), le champ électrique est recherché sous la forme

$$\vec{E} = E_0(r) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r \quad \text{ou} \quad \vec{E} = E_0(r) e^{i(\omega t - kz)}$$

6. Il existe aussi des modes Transverses Magnétiques (TM), mais pas de modes TEM. C'est une particularité du guide d'onde rectangulaire, au contraire du guide du câble coaxial qui est un guide d'onde cylindrique, et qui permet la propagation de modes TEM.

en notation complexe. On rappelle qu'au sein d'un métal parfait le champ électrique et magnétique sont nuls (hors composante magnétique uniforme stationnaire non présente ici).

1. En utilisant les équations de Maxwell (et le formulaire), expliciter la fonction $E_0(r)$ à une constante multiplicative D près. En déduire l'expression du champ magnétique, et vérifier la compatibilité des champs avec les conditions limites sur le métal. Puis établir la relation de dispersion associée à cette solution. Que valent la vitesse de phase et la vitesse de groupe ?
2. Calculer le vecteur de Poynting moyen, et en déduire l'expression de la constante D en fonction de la puissance moyenne rayonnée totale P à travers une section droite.
Dans la suite on suppose la constante D connue.
3. Calculer l'intensité du courant $i(z, t)$ circulant dans l'âme, orienté selon $+\vec{e}_z$. En déduire que l'on peut définir une inductance linéique L_ℓ pour ce câble.
4. On admet que la densité surfacique de charge présente sur une surface métallique de normale sortante $\vec{n}$ (dirigée vers l'extérieur du métal) vérifie⁷ $\sigma_s = \varepsilon_0 \vec{n} \cdot \vec{E}$. Calculer σ_s sur l'âme et en déduire la capacité linéique C_ℓ du câble. Vérifier que $L_\ell C_\ell = \frac{1}{c^2}$.

EX 12 – Couche anti-reflet

Une OEMPPM PR selon $\vec{u}_y$ de longueur d'onde dans le vide λ_0 se propage selon $+\vec{u}_x$ successivement dans trois milieux diélectriques transparents contigus séparés par deux dioptries plans transverses situés en $x = 0$ et $x = e$. Issue d'un milieu d'indice de réfraction n_1 , elle entre en incidence normale dans une lame de verre d'indice n_2 d'épaisseur e , et ressort dans un milieu d'indice n_3 . On suppose $n_3 \neq n_1$, et on prendra pour les AN $n_1 = 1,00$, $n_3 = 1,60$ et $\lambda_0 = 0,55 \mu\text{m}$. Pour simplifier les calculs, on pourra faire usage des notations suivantes :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 e, \quad r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}, \quad t_{23} = \frac{2n_2}{n_2 + n_3},$$

ainsi que les autres coefficients obtenus en permutant les indices.

1. Première méthode :

- a) Faire un schéma en représentant les OPPH en présence, puis écrire les champs électrique et magnétique dans chaque zone (1), (2), (3) en fonction de x , en introduisant si nécessaire une OPPH se propageant selon les x décroissant. On notera en particulier les amplitudes des ondes incidente, réfléchie vers (1) par la couche (2), et transmise vers (3) par la couche (2) respectivement $\vec{E}_{0i}$, $\vec{E}_{0r}$ et $\vec{E}_{0t}$. Exprimer les quatre conditions de continuité en fonction des amplitudes, des indices et de φ .

- b) En déduire les coefficients de réflexion et de transmission par la couche (2)

$$\underline{r} = \frac{\underline{E}_r(t, x = 0^-)}{\underline{E}_i(t, x = 0^-)} \quad \text{et} \quad \underline{\tau} = \frac{\underline{E}_t(t, x = e^+)}{\underline{E}_i(t, x = 0^-)}$$

puis les coefficients R et T de réflexion et transmission en puissance par la couche (2).

- c) Établir la condition pour une absence d'onde réfléchie portant sur φ et les indices. En déduire la valeur que doit prendre n_2 et les épaisseurs e possibles, en particulier l'épaisseur minimale $e_{\min}$. Cela est-il réalisable ?

2. *Deuxième méthode* : On revient sur le calcul de $\underline{r}$ et $\underline{\tau}$ effectué en 1. par une seconde approche, qui permettra une interprétation physique de la condition de non réflexion. On considère que l'onde réfléchie est le résultat de la superposition d'une infinité d'ondes ayant toutes effectué un certain nombre (possiblement nul) d'aller-retours à l'intérieur de la couche (2) avant d'émerger dans (1).

- a) Vérifier que $t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21} = 1$. À quelle propriété physique correspond cette relation ?
- b) En utilisant ces coefficients et leurs propriétés ainsi que φ , exprimer l'amplitude $\underline{E}_{0r}$ de l'onde résultante réfléchie, et en déduire directement l'expression de $\underline{r}$. Appliquer la même approche pour exprimer $\underline{E}_{0t}$ et retrouver $\underline{\tau}$.
- c) Interpréter physiquement la condition de non réflexion, et montrer qu'elle est aussi en faveur de la transmission.

7. Théorème de Coulomb, démontrable avec le théorème de Gauss sur une surface fermée infinitésimale.