Ondes Électromagnétiques dans le vide

EX 1 – Émission d'une station de radio

On considère une station de radio émettant sur une porteuse de fréquence $f = 92\,\text{MHz}$ (FM). L'onde est réceptionnée à grande distance $d = 100\,\text{km}$, à l'aide d'une antenne de type cadre carrée, de côté $a = 10\,\text{cm}$ à $N = 1000$ spires. On admet que l'on peut supposer l'onde localement plane, de polarisation rectiligne selon la verticale.

1. Que vaut la longueur d'onde ? Que signifie ici être à grande distance de la source ?
2. Comment placer l'antenne de façon optimale pour maximiser la fem induite dans l'antenne ?
3. En supposant qu'au niveau de l'antenne émettrice, l'émission est isotrope en puissance [1], calculer la puissance nécessaire à l'émission pour obtenir une fem d'amplitude $E_0 = 0,1\,\text{V}$ au niveau de la réception. Évaluer l'amplitude du champ électrique à la réception (distance d), puis tout près de l'émission (distance $d' = 10\,\text{m}$).

EX 2 – Superposition de deux OPPM synchrones cohérentes

Deux ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques 1 et 2, de même pulsation ω et supposées mutuellement cohérentes, se propagent dans le vide dans le plan Oxy, suivant deux directions symétriques par rapport à Ox et faisant les angles θ et $-\theta$ par rapport à Ox. Les champs électriques $\overrightarrow{E}_1$ et $\overrightarrow{E}_2$ de ces ondes sont parallèles à Oz et de même amplitude E_0. Ils vibrent en phase en l'origine du repère O.

1. Etablir les propriétés de l'onde résultante : direction de propagation, vitesse de phase v_φ, direction des champs. L'onde est-elle plane ?
2. Calculer la valeur moyenne temporelle $\langle\vec{\Pi}\rangle$ du vecteur de Poynting et étudier l'éclairement d'une surface perpendiculaire à $\langle\vec{\Pi}\rangle$. Y a-t-il des interférences ?
3. Calculer la puissance moyenne totale transportée par l'onde résultante à travers une surface S orthogonale à la direction de propagation, et de largeur $\lambda/\sin\theta$. Pourquoi choisir une telle surface ?
4. En déduire la vitesse v_e de propagation de l'énergie électromagnétique. Que vaut $v_e\,.\,v_\varphi$? Représenter $v_\varphi(\theta)$ et $v_e(\theta)$ pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

EX 3 – Onde cylindrique à grande distance

Une onde électromagnétique émise par des sources invariantes par translation et rotation selon l'axe (Oz) possède une structure dite cylindrique. C'est le cas par exemple de l'onde générée par un fil rectiligne parcouru par un courant $i(t) = I_0\cos(\omega t)$. En coordonnées cylindriques, le champ électrique d'une onde progressive divergente, monochromatique et polarisée suivant l'axe (Oz), possède une amplitude $F(r)$ fonction de la distance à l'axe, dont on souhaite déterminer la dépendance en r. En notation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = F(r)\, e^{i(\omega t - kr)}\, \vec{u}_z$$

où $F(r)$ est supposé réel, et $k = \frac{\omega}{c}$ puisque la propagation a lieu dans le vide.

1. Déterminer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ à partir de l'équation de Maxwell-Faraday. Commenter les deux termes qui le composent.
2. Quelle est la valeur moyenne $\langle\vec{\Pi}\rangle$ du vecteur de Poynting ? En déduire la puissance moyenne P rayonnée par l'onde à travers un cylindre d'axe (Oz) de hauteur h et de rayon r.
3. Comment cette puissance évolue-t-elle avec r ? Justifier. En déduire $F(r)$ en fonction de r, de P_h (puissance par unité de hauteur) et des constantes ε_0 et c.
4. Dans l'hypothèse $r \gg \lambda$ (champ lointain), donner les champs $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ et montrer que localement la structure de l'onde est celle d'une onde plane, c'est-à-dire qu'elle est transverse et vérifie les mêmes relations de structure qu'une OPP dans le vide.

EX 4 – Onde sphérique

On considère une onde sphérique progressive harmonique (OSPH) $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$ de source l'origine O et se propageant dans le vide, dont les composantes s'écrivent de façon générale sous la forme

$$E_p(r,t) = F_p(r)\,\cos(\omega t - kr + \varphi_p) \text{ et } B_p(r,t) = G_p(r)\,\cos(\omega t - kr + \psi_p)\,, \text{ avec } p = r, \theta, \varphi$$

et $k = \frac{\omega}{c}$. On pourra utiliser le formulaire des opérateurs en coordonnées et base sphériques, et utiliser la notation complexe.

1. En définissant un « vecteur d'onde local » $\vec{k} = k\vec{u}_r$, montrer que l'OSPH est localement transverse.
2. En utilisant $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$, montrer que l'équation de D'Alembert se réduit à
$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rX_p)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X_p}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{avec} \quad X = E, B \quad \text{et} \quad p = \theta, \varphi$$
En déduire la forme que prennent les fonctions $F_p(r)$ et $G_p(r)$.
3. En déduire que l'OSPH a une structure d'onde « localement plane », c'est-à-dire qu'elle est transverse et vérifie les mêmes relations de structure qu'une OPP dans le vide.
4. Calculer le vecteur de Poynting en fonction de $\vec{E}(M,t)$, et en déduire la puissance moyenne sur une sphère de rayon r centrée en O. Que constate-t-on ? A posteriori aurait-on pu postuler la forme des fonctions $F_p(r)$?
5. Ces résultats sont-ils préservés pour une onde sphérique progressive quelconque (non nécessairement harmonique) ?

1. Ceci n'est pas correct en réalité pour une onde émise par une antenne rectiligne.

EX 5 – Rayonnement dipolaire et bleu du ciel

Lorsqu'une particule chargée P de charge q est accélérée, on peut montrer qu'elle rayonne de l'énergie électromagnétique dans l'espace [2]. Le vecteur de Poynting associé à ce rayonnement s'exprime alors, au point M situé à la distance $r = PM$:

$$\vec{\Pi}(t) = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 r^2 c} \left\| \vec{u}_r \wedge \vec{a}\left(t - \tfrac{r}{c}\right) \right\|^2 \vec{u}_r$$

où $\vec{u}_r$ est défini par $\overrightarrow{PM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{a}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ est l'accélération de P dans le référentiel d'étude à l'instant $t - \frac{r}{c}$.

1. On considère le cas d'une particule chargée décrivant un mouvement rectiligne oscillatoire harmonique selon l'axe (Oz), d'amplitude $z_0 \ll r$, de telle sorte que $\overrightarrow{PM} \approx \overrightarrow{OM} \approx r\vec{u}_r$.

- **a)** Déterminer le vecteur de Poynting en fonction des coordonnées sphériques puis sa moyenne temporelle. Déterminer la puissance moyenne rayonnée dans l'espace.
- **b)** Lorsque les molécules de l'atmosphère terrestre sont soumises aux rayons solaires incidents, les électrons qui les constituent se comportent comme des oscillateurs en régime forcé (pour la lumière visible et UV), et donc à leur tour comme des sources de rayonnement électromagnétique synchrones avec le rayonnement solaire. On parle alors de *diffusion élastique* ou *diffusion Rayleigh*. En quoi le résultat précédent permet-il de comprendre pourquoi le ciel nous paraît bleu (lorsque l'on ne regarde pas en direction du Soleil) ? Pourquoi le lever ou coucher de Soleil se traduit-il par un rougeoiement ?

2. Une particule chargée décrivant des petites oscillations au voisinage de sa position d'équilibre peut être modélisée comme un oscillateur harmonique équivalent de type système masse-ressort (m, k).

- **a)** Exprimer son énergie mécanique en fonction de l'amplitude Z_m de son mouvement, qui sera supposé unidimensionnel.
- **b)** Montrer qu'en régime libre, Z_m varie nécessairement progressivement au cours du temps, et trouver sa loi de variation en utilisant les résultats précédents.
- **c)** Comment corriger le modèle mécanique d'oscillateur harmonique pour prendre en compte cet effet ? Pourquoi cela ne modifie-t-il pas l'interprétation du ciel bleu proposée ci-dessus, sachant que les composants majoritaires de l'atmosphère n'absorbent pas dans le visible, mais seulement dans l'UV (ozone et dioxygène notamment) ?

EX 6 – Effet d'une lame biréfringente sur l'intensité

Une OPPM de longueur d'onde λ, polarisée rectilignement selon la direction $\vec{u}$, bissectrice des axes x et y se propage selon l'axe (Oz). Elle traverse successivement :

2. On parle de *rayonnement d'accélération*.

- une lame biréfringente qui déphase la composante y du champ par rapport à la composante x, d'une quantité φ ;
- un polariseur de direction $\vec{u}$.

Montrer que le rapport de l'intensité de l'onde en sortie par rapport à l'onde en entrée est $\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, condition de négliger l'absorption liée à chaque traversée.

EX 7 – Masse du photon

On peut montrer que si le photon possédait une masse, les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère devraient être modifiées (pas les autres). Notamment on devrait écrire

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\delta^2} V$$

avec V le potentiel électrique, et l'équation de propagation du champ serait ainsi modifiée [3]

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta^2}\vec{E}$$

1. Quelle est la dimension de δ ?

2. On se place en régime stationnaire dans la situation où se trouve en O une charge q. Déterminer la forme du potentiel $V(r)$ après avoir établi l'équation vérifiée par V. On pourra commencer par utiliser le formulaire pour montrer que le laplacien vérifie

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV(r))}{\partial r^2}$$

Quel est l'effet de δ ? Commenter.

3. Par analyse dimensionnelle, exprimer δ en fonction de h (constante de Planck), de la masse m supposée du photon, et de c (vitesse de la lumière dans le vide). Sachant qu'on estime aujourd'hui $m < 10^{-54}$ kg, à quelle valeur de δ correspond cette limite ?

4. On revient en régime quelconque et on considère maintenant une OPPM généralisée. Déterminer la relation de dispersion. À quelle condition l'onde se propage-t-elle ? Calculer les vitesses de phase et de groupe, et représenter leur variations en fonction de ω. Commenter.

5. Rappeler le lien existant en Physique Quantique, pour une onde de De Brœglie, entre énergie E et pulsation ω, et quantité de mouvement $\vec{p}$ et vecteur d'onde $\vec{k}$. Que trouve-t-on lorsque l'on combine ces relations avec la relation de dispersion précédente ? Commenter.

3. Ce type d'équation d'onde est dite de Klein Gordon (1926). Elle apparaît notamment en théorie quantique des champs pour la représentation du Boson de Higgs. On la retrouve dans d'autres domaines, comme par exemple les ondes dans les plasmas.