

Ondes scalaires unidimensionnelles

Équation de D'Alembert

EX 1 – Impédance d'une corde - Réflexion sur une discontinuité

Une corde de masse linéique μ tendue par une tension T_0 constante est supposée sans raideur transversale et horizontale au repos selon l'axe (Ox) . On note $y(x, t)$ son écart à la position d'équilibre en présence d'une petite perturbation selon la verticale. L'influence du poids est négligée et on s'intéresse uniquement aux petits mouvements verticaux.

1. Rappeler les équations couplées entre les variables dites *conjuguées* que sont la vitesse verticale $v(x, t)$ et la force de tension verticale $T_y(x, t)$ exercée par la droite de la corde sur la gauche en x .

En déduire que pour une onde plane progressive, il existe une grandeur positive Z_c appelée *impédance caractéristique mécanique* de la corde qui vérifie

$$T_y(x, t) = \mp Z_c v(x, t)$$

selon que l'onde se propage selon les x croissant ou décroissant. On exprimera Z_c en fonction des constantes du problème.

On associe maintenant deux cordes vibrantes de masse linéique respective μ_1 et μ_2 , en les soudant bout-à-bout en $x = 0$. Une onde incidente $y_i(x, t)$ en provenance des $x < 0$ atteint la discontinuité, ce qui engendre une onde réfléchie $y_r(x, t)$ vers les $x < 0$ et une onde transmise $y_t(x, t)$ vers les $x > 0$.

2. En écrivant deux conditions limites portant sur v et T_y , montrer que ces ondes sont proportionnelles et établir l'expression des coefficients de réflexion r et de transmission τ . Discuter les cas limites.

EX 2 – Ondes de compression dans un métal

On considère un cristal métallique de fer de type Fe_α cristallisant en cubique centré de paramètre de maille $a = 287 \text{ pm}$. Son spectre d'absorption possède une raie importante à $1,28 \mu\text{m}$. Sa masse molaire est $M_{\text{Fe}} = 55,8 \text{ g.mol}^{-1}$. On rappelle la constante de Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$.

1. Déterminer un ordre de grandeur de la constante de raideur k équivalente à la liaison métallique entre deux ions métalliques.
2. En déduire la valeur de la célérité c des ondes de compression dans ce métal. La valeur tabulée à température ambiante est $c = 5,1 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$. Commenter.

On considère une poutre en Fer Fe_α de section S , de longueur $L = 10 \text{ m}$ horizontale. On laisse les deux sections latérales libre, et on frappe à l'aide d'un marteau sur l'une des extrémités des deux, dans un mouvement longitudinal.

3. Quelle condition aux limites $x = 0$ et $x = L$ doit être appliquée ici ? Montrer que seules certaines fréquences de vibrations longitudinales sont transmises par la poutre. Les déterminer. Quelle est la hauteur du son entendu ?
4. On souhaite établir le bilan d'énergie local associé à ces vibrations. On note (Ox) l'axe de la poutre dans sa longueur, orienté de gauche à droite, et $\xi(x, t)$ le déplacement d'un plan réticulaire transverse par rapport à sa position de repos.

- a) En raisonnant sur une tranche d'épaisseur au repos dx , définir l'énergie cinétique volumique locale e_c en fonction de $\xi(x, t)$ et des constantes nécessaires. En s'appuyant sur l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort, établir aussi l'expression de l'énergie potentielle volumique e_p .
- b) Comment s'exprime la puissance surfacique $\mathcal{P}_s(x, t)$ exercée par l'onde en x sur la partie droite de la poutre ? En déduire, par un bilan d'énergie sur une tranche d'épaisseur au repos dx , que la densité d'énergie volumique totale $e = e_c + e_p$ vérifie

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial x} = 0$$

- c) Cette équation est-elle compatible avec l'équation d'onde de D'Alembert vérifiée par ξ ?

5. On souhaite utiliser le bilan énergétique précédent pour exprimer la partition énergétique qui s'opère lorsqu'une OPP incidente rencontre une interface entre deux solides distincts, caractérisés par des modules d'Young (E_1, E_2) et des masses volumiques (μ_{01}, μ_{02}) différentes. Les calculs du cours ont conduit à l'existence de coefficients de réflexion et transmission r et τ vérifiant

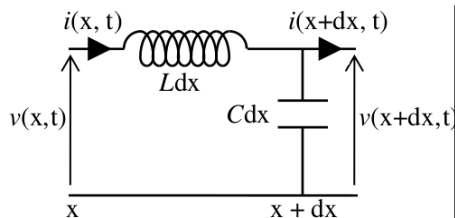
$$r = \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} \quad \text{et} \quad \tau = 1 + r = \frac{2Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}} \quad \text{avec} \quad Z_{ck} = \sqrt{E_k \mu_{0k}}, \quad k = 1, 2.$$

- a) Montrer que les densités volumiques d'énergies e_i et e_r associées respectivement à l'OPP incidente et à l'OPP réfléchie sont additives. Montrer qu'il en est de même pour les puissances surfaciques $\mathcal{P}_{si}$ et $\mathcal{P}_{sr}$.
- b) En utilisant les expressions de r et τ ci-dessus, calculer les coefficients de réflexion et de transmission en énergie (puissance) définis par $|\mathcal{P}_{sr}| = R\mathcal{P}_{si}$ et $\mathcal{P}_{st} = T\mathcal{P}_{si}$ en fonction de $\alpha = \sqrt{E_2 \mu_{02}} / \sqrt{E_1 \mu_{01}}$. Montrer que $R + T = 1$. Interpréter. Examiner les cas particuliers $\alpha \rightarrow 1$ et $\alpha \rightarrow 0$.

EX 3 – Ondes dans une ligne de transmission bifilaire

On s'intéresse à la transmission d'un signal électrique dans une ligne de transmission sur une distance de quelques mètres à plusieurs kilomètres. L'ARQS n'est plus valable : il s'agit ici de mettre en évidence la propagation d'un signal à une vitesse non infinie. Une ligne de transmission peut être formée à partir de deux fils parallèles, deux fils torsadés ou d'un câble coaxial.

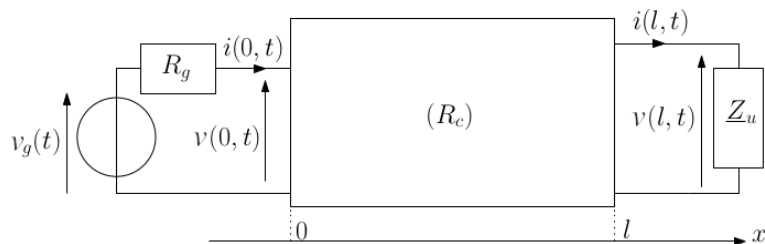
Pour décrire la propagation dans cette ligne, on utilise alors un modèle dit « à constantes réparties » comme indiqué ci-contre. En effet, seule une portion d'épaisseur assez faible peut être étudiée dans le cadre de l'ARQS. Cette portion comporte une bobine d'inductance linéique L et un condensateur de capacité linéique C .



Dans l'exemple présent, on néglige la résistance des conducteurs (hypothèse d'un milieu non absorbant et non dispersif). Pour cette tranche d'épaisseur, on peut alors appliquer les lois de Kirchhoff.

1. Montrer que $i(x, t)$ et $v(x, t)$ sont des grandeurs conjuguées, c'est-à-dire satisfont un système d'équations spatio-temporelles couplées.
2. En déduire que $i(x, t)$ et $v(x, t)$ vérifient l'équation de d'Alembert. Déterminer la célérité c des ondes, ainsi que l'impédance caractéristique Z_c de la ligne, que l'on notera plus loin R_c .

On applique à l'entrée de la ligne, en $x = 0$, une tension $v_g(t) = V_m \cos(\omega t)$ et à la fin de la ligne, on place une impédance de charge Z_u comme indiqué ci-contre.



La ligne n'étant pas adaptée, l'onde résultante peut être décrite comme la superposition de deux OPPH synchrones avec la source se propageant en sens contraire¹. On se place donc en régime sinusoïdal forcé, et on adopte les formes complexes :

$$v(x, t) = \text{Re}(\underline{v}(x, t)) \quad \text{avec} \quad \underline{v}(x, t) = e^{j\omega t} \underline{V}(x) \quad \text{et} \quad \underline{V}(x) = \underline{A}e^{-jkx} + \underline{B}e^{jkx}$$

3. a) Comment s'écrit la forme complexe associée à l'intensité $i(x, t)$?
b) Exprimer A et B en fonction de V_m , R_c , R_g , Z_u , ℓ et k . Que deviennent ces coefficients lorsque $|Z_u| \ll R_c$, $|Z_u| \gg R_c$ et $Z_u = R_c$? Interpréter.
c) Définir le coefficient de réflexion r en bout de ligne. Que vaut r dans les trois cas étudiés précédemment ? Interpréter.
4. Bilan énergétique ;
a) Exprimer la densité linéique d'énergie électromagnétique $e(x, t)$ en fonction de $v(x, t)$ et de $i(x, t)$. Simplifier cette expression en l'exprimant uniquement en fonction de $i(x, t)$ dans le cas où il s'agit d'une OPP.

1. On pourrait choisir une forme en onde stationnaire comme pour la corde de Melde, ce qui reviendrait au même.

- b) Exprimer la puissance $\mathcal{P}(x, t)$ reçue par la partie droite et cédée par la partie gauche en x . Établir l'équation traduisant le bilan local d'énergie entre $e(x, t)$ et $\mathcal{P}(x, t)$.
- c) En raisonnant sur une tranche d'épaisseur dx , montrer que pour une OPP, l'énergie se propage dans le même sens que l'onde et à la vitesse c .

EX 4 – Étude énergétique et spectrale d'une corde vibrante

On s'intéresse à la corde vibrante de masse linéique μ , que l'on suppose tendue par un système poulie-masse conduisant à une tension T_0 supposée constante. Au repos, la corde est de longueur L , rectiligne et horizontale, la pesanteur étant supposée négligeable. On suppose des petits mouvements verticaux, et on note $y(x, t)$ l'écart à la position d'équilibre. On définit la densité linéique d'énergie $e(x, t)$ de la corde en mouvement est une grandeur telle que l'énergie de la corde à l'instant t s'écrive

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^L e(x, t) dx$$

1. Définir la densité linéique d'énergie cinétique e_c en fonction de $y(x, t)$.
2. Pour définir l'énergie potentielle linéique e_p de la corde, on remarque que lors de sa déformation, la corde passe de la longueur L à la longueur ℓ , ce qui occasionne un travail W reçu par la corde, fourni par la masse qui tend la corde. Exprimer W en fonction de la variation de longueur, puis en donnant une expression approchée de ℓ pour les petites oscillations, identifier l'expression de e_p . Retrouver cette expression en calculant de façon locale le travail reçu par un tronçon de longueur dx entre sa position de repos et sa position à l'instant t .
3. Montrer qu'il est possible de définir une grandeur S telle que

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

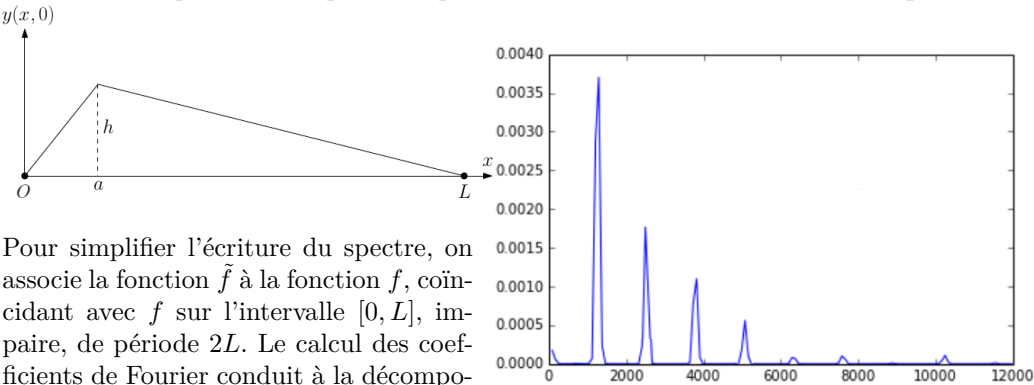
et donner l'expression de S . Interpréter cette relation et donner la signification physique de S .

En intégrant cette équation, montrer comment varie l'énergie totale $\mathcal{E}(t)$ de la corde.

4. a) On décompose l'onde $y(x, t)$ sur la base des modes propres $y_n(x, t)$, dont l'amplitude est notée Y_n . Rappeler l'expression de $y_n(x, t)$ en fonction de l'ordre n .
b) Calculer l'énergie totale $\mathcal{E}_n$ d'un mode propre en fonction de n , Y_n , L et T_0 . Que remarque-t-on ?
c) Exprimer l'énergie totale $\mathcal{E}$ de l'onde résultante en fonction des Y_n .

Indication : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$, soit $I_{nm} = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$, avec $\delta_{nm} = 1$ si $n = m$ et $\delta_{nm} = 0$ si $n \neq m$. Cette propriété est valable avec des cos à la place des sin.

On considère une corde de « Mi » dans un Clavecin, instrument dans lequel les cordes sont pincées et lâchées sans vitesse initiale dans l'état de déformation modélisé ci-dessous par la fonction $y(x, 0) = f(x)$ (appelée *déformée initiale*). On enregistre le son et on trace le spectre en amplitude représenté ci-dessous en fonction de la fréquence.



Pour simplifier l'écriture du spectre, on associe la fonction $\tilde{f}$ à la fonction f , coïncidant avec f sur l'intervalle $[0, L]$, impaire, de période $2L$. Le calcul des coefficients de Fourier conduit à la décomposition en série de Fourier de $\tilde{f}$ suivante :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{avec} \quad Y_n = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2a(L-a)} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

5. En vous aidant du tableau ci-dessous, exploiter au maximum ce spectre pour caractériser le clavecin.

	octave	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NOTES												
Do	C	16.3 Hz	32.7 Hz	65 Hz	131 Hz	262 Hz	523 Hz	1 046.5 Hz	2 093 Hz	4 186 Hz	8 372 Hz	16 744 Hz
Do dièse ou Re bémol	C# / Db	17.3 Hz	34.6 Hz	69 Hz	139 Hz	277 Hz	554 Hz	1 109 Hz	2 217 Hz	4 435 Hz	8 870 Hz	17 740 Hz
Re	D	18.3 Hz	36.7 Hz	74 Hz	147 Hz	294 Hz	587 Hz	1 175 Hz	2 349 Hz	4 698 Hz	9 396 Hz	18 792 Hz
Re dièse ou Mi bémol	D# / Eb	19.4 Hz	38.9 Hz	78 Hz	156 Hz	311 Hz	622 Hz	1 244.5 Hz	2 489 Hz	4 978 Hz	9 956 Hz	19 912 Hz
Mi	E	20.5 Hz	41.2 Hz	83 Hz	165 Hz	330 Hz	659 Hz	1 318.5 Hz	2 637 Hz	5 274 Hz	10 548 Hz	21 096 Hz
Fa	F	21.8 Hz	43.6 Hz	87 Hz	175 Hz	349 Hz	698.5 Hz	1 397 Hz	2 794 Hz	5 588 Hz	11 176 Hz	
Fa dièse ou Sol bémol	F# / Gb	23.1 Hz	46.2 Hz	92.5 Hz	185 Hz	370 Hz	740 Hz	1 480 Hz	2 960 Hz	5 920 Hz	11 840 Hz	
Sol	G	24.5 Hz	49.0 Hz	98 Hz	196 Hz	392 Hz	784 Hz	1 568 Hz	3 136 Hz	6 272 Hz	12 544 Hz	
Sol dièse ou La bémol	G# / Bb	26.0 Hz	51.9 Hz	104 Hz	208 Hz	415 Hz	831 Hz	1 661 Hz	3 322 Hz	6 645 Hz	13 290 Hz	
La	A	27.5 Hz	55.0 Hz	110 Hz	220 Hz	440 Hz	880 Hz	1 760 Hz	3 520 Hz	7 040 Hz	14 080 Hz	
La dièse ou Si bémol	A# / Bb	29.1 Hz	58.0 Hz	117 Hz	233 Hz	466 Hz	932 Hz	1 865 Hz	3 729 Hz	7 458 Hz	14 918 Hz	
Si	B	30.8 Hz	62.0 Hz	123 Hz	247 Hz	494 Hz	988 Hz	1 975 Hz	3 951 Hz	7 902 Hz	15 804 Hz	

EX 5 – Couplage d’une corde vibrante avec une table d’harmonie

L'étude d'une corde vibrante dont les deux extrémités sont fixes ne permet pas de décrire correctement l'émission du son par un instrument à corde. En effet, la puissance sonore rayonnée par la corde elle-même est trop faible pour être perçue : c'est le couplage de la corde avec la table d'harmonie de l'instrument, sur laquelle elle est fixée, et plus généralement avec la caisse de résonance (si caisse il y a), qui permet de produire une puissance sonore importante. Il faut donc tenir compte du mouvement d'au moins une des extrémités de la corde.

Nous adopterons un modèle simplifié en considérant une corde homogène et sans raideur, de masse linéique μ , de longueur L , soumise à une tension T uniforme, horizontale à l'équilibre (selon (Ox)) et subissant de faibles perturbations selon (Oy) . L'extrémité de la corde située en $x = 0$ est solidaire d'une masse m_0 mobile pouvant se déplacer transversalement selon (Oy) librement.

1. Chercher les solutions sous forme de modes propres, et montrer qu'ils sont quantifiés grâce à une relation imposée à la pulsation spatiale k , ou à la pulsation temporelle ω .
2. Par une représentation graphique appropriée, comparer les pulsations propres ω_n à celles obtenues dans le cas où les deux extrémités sont fixes. Expliquer l'effet de la prise en compte d'une extrémité massive mobile.

EX 6 – Corde plombée

Une corde de longueur $2L$, de masse m et de masse linéique λ a ses deux extrémités fixées sur un axe (Ox) . Une masse ponctuelle M solidaire de la corde a été placée à égales distances de ses extrémités. La corde est tendue avec une tension T_0 , supposée suffisamment grande pour que l'on ne tienne pas compte de la pesanteur. On se limitera aux petits mouvements transverses selon un seul axe (Oy) .

1. Déterminer tous les modes propres caractéristiques du système.
2. Étudier les cas particuliers où $M \ll m$, puis $M \gg m$.

Milieux dispersifs, Milieux non linéaires

EX 7 – Dispersion pour un paquet d’onde continu

On étudie la propagation d'un paquet d'onde

$$s(x, t) = \int_0^\infty S(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega$$

dont le profil spectral $S(\omega)$ est supposé rectangulaire, c'est-à-dire constitue une raie de largeur en fréquence $\Delta\omega$ centrée sur ω_0 telle que $\Delta\omega \ll \omega_0$: $S(\omega) = S_0 = \text{cte}$ si $|\omega - \omega_0| < \frac{\Delta\omega}{2}$ et $S(\omega) = 0$ sinon. La relation de dispersion du milieu prend la forme générale $k = f(\omega)$.

1. En approximant la relation de dispersion, montrer que le signal peut se mettre sous la forme approchée

$$s(x, t) = F\left(t - \frac{x}{v_g}\right) e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \quad \text{avec} \quad k_0 = f(\omega_0) \quad \text{et} \quad v_g$$

une grandeur que l'on exprimera.

2. Calculer $F(t - \frac{x}{v_g})$ en l'exprimant à l'aide de la fonction sinus cardinal : $\text{sinc}(u) = \frac{\sin u}{u}$.

3. On suppose que l'intensité énergétique I du signal est définie par le carré du module de $\underline{s}$: $I(x, t) = |\underline{s}(x, t)|^2$. Représenter graphiquement $I(x, t_0)$, à une date t_0 quelconque. De même, représenter $I(x_0, t)$ à une abscisse x_0 quelconque. Donner la largeur à mi-hauteur des courbes. Quel lien existe-t-il entre ces deux largeurs ?

EX 8 – Ondes élastiques sur une chaîne d'atomes

On souhaite modéliser les vibrations dans les solides par un modèle microscopique monodimensionnel. Une chaîne linéaire supposée infinie selon l'axe (Ox) est constituée d'atomes identiques de masse m . À l'équilibre, ils sont séparés par une distance a et l'atome n se trouve à l'abscisse $x_n^0 = na$. Lorsqu'une perturbation longitudinale modifie la position de l'atome n d'une quantité $x_n - x_n^0 = u_n \ll a$, celui-ci est alors soumis à des interactions modélisées par des forces de rappel de raideur K , limitées entre atomes premiers voisins. Le milieu étant discrétisé et non continu (échelle microscopique), on représente une OPPH d'amplitude A par la suite de fonctions du temps

$$u_n(t) = \underline{A} e^{i(\omega t - kx_n^0)}$$

1. À l'aide du Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à l'atome de rang n , établir la relation de dispersion sous la forme

$$\omega = \omega_M \left| \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right|$$

avec ω_M une constante que l'on exprimera.

2. Que vaut la longueur d'onde pour la pulsation maximale $\omega = \omega_M$? Décrire le mouvement des atomes dans ce cas. Expliquer pourquoi on peut se limiter à cette pulsation spatiale k maximale pour décrire les solutions ondulatoires.
3. Représenter graphiquement $\omega = f(k)$ sur ce domaine. Le milieu est-il non dispersif ? Sinon au voisinage de quelles valeurs de k (de λ) peut-on le considérer non dispersif ? Calculer les vitesses de phase et de groupe pour confirmer cela. On donnera les limites de v_ϕ et v_g pour $ka \rightarrow 0$ et $ka \rightarrow \pi$. Commenter.
4. On prend pour exemple le Fer : $a = 2,5 \cdot 10^{-10}$ m, $M_{\text{Fe}} = 56$ g.mol $^{-1}$, et $K \approx 5 \cdot 10^1$ N.m $^{-1}$. Calculer la fréquence maximale f_M et la longueur d'onde associée. Dans quel domaine se situe-t-on relativement aux ondes sonores ? La dispersion doit-elle être prise en compte dans le domaine de l'audible ? Quelle valeur prendront les vitesses v_ϕ et v_g pour $f < f_M/100$?
5. On se place maintenant dans le cas où $ka \ll \pi$. Justifier que l'ensemble des fonctions $u_n(t)$ puisse maintenant être représenté par une fonction continue $u(x, t)$ où la variable x représente l'emplacement au repos d'un atome. Établir alors l'équation d'onde vérifiée par u et exprimer la célérité des ondes notée c_l . Cette expression est-elle conforme à celle trouvée en passant par la loi de Hooke et le module d'Young ?

EX 9 – Oscillations d'une corde verticale

On suspend une corde infiniment souple (sans raideur transversale), de masse linéique μ , de longueur L au point A de cote $z = 0$, l'axe vertical (Oz) étant dirigé vers le bas. L'extrémité inférieure est laissée libre. La corde est perturbée par le mouvement oscillatoire sinusoïdal de A autour de l'origine O selon (Oy) : $y_A(t) = a \cos(\omega t)$. Cela engendre un déplacement transversal $y(z, t)$ par rapport à l'état de repos.

1. Établir la tension de la corde en fonction de z , et en déduire que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g(L - z) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - g \frac{\partial y}{\partial z}$$

2. On se place au voisinage de l'extrémité supérieure de la corde, de telle sorte que $z \ll L$. Établir la relation de dispersion dans ce cadre. Expliquer pourquoi cette approche n'est pertinente que si ω est suffisamment grand. Par rapport à quoi ?
3. Toujours dans ce cadre d'approximation, que peut-on dire de l'amplitude des vibrations quand z augmente ?
4. On se place maintenant en z quelconque, mais on suppose toujours ω suffisamment grand pour que la pulsation spatiale locale $k(z)$ vérifie toujours $k(z)L \gg 1$, c'est-à-dire que le milieu est supposé « lentement variable » relativement à la coordonnée spatiale en comparaison avec la perturbation. Comment doit-on modifier les solutions ci-dessus ? Comment évolue la longueur d'onde en fonction de z ?

On cherche maintenant une solution exacte à l'équation d'onde ci-dessus, qu'on prend sous une forme à variables séparées :

$$y(z, t) = Y(z) \cos(\omega t + \varphi)$$

5. Établir l'équation différentielle vérifiée par $Y(x)$, qu'on ne cherchera pas à résoudre.
6. La solution se cherche sous forme de somme de série entière. Avec le changement de variable $Z = \frac{\omega^2}{g} (L - z)$, on obtient une fonction de Bessel :

$$Y(Z) = Y_0 J_0(Z) \quad \text{avec} \quad J_0(Z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} Z^n$$

Quelle valeur donner aux constantes Y_0 et φ en fonction des paramètres du problème a , ω , g et L , et de la fonction J_0 ?

7. On prend pour valeur numérique $L = 1$ m, $a = 1$ mm, $g = 9,8$ m.s $^{-2}$ et une fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi} = 5$ Hz. Sachant que les premiers zéros successifs de J sont situés en $Z = 1,5, 7,6, 18,7, 34,8, 55,7, 81,6$ et $112,5$, et que la fonction voit ses oscillations décroître en amplitude, représenter qualitativement l'allure de $y(z, t)$ sur l'intervalle $[0, L]$ à l'instant où $\cos(\omega t + \varphi) = 1$. Cette allure est-elle conforme aux résultats précédents ?
8. On donne $Y(100) \approx 0,18$. Évaluer l'écart y à l'extrémité libre de la corde. Que se passerait-il si on choisissait la fréquence telle que $J_0\left(\frac{\omega^2 L}{g}\right) = 0$?