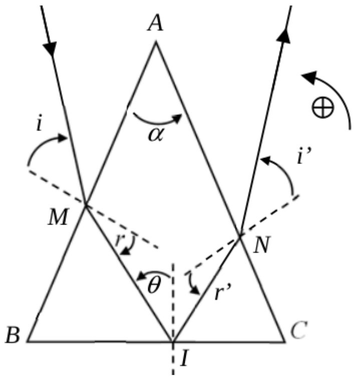
# Optique Géométrique (Programme de Sup)

## Lois de Descartes

### EX 1 – Prisme à réflexion totale

On considère un prisme de verre d'indice $n$. L'intersection des faces du prisme avec un plan de section principale (plan perpendiculaire à l'arête du prisme) dessine un triangle isocèle $ABC$ de sommet $A$. L'angle au sommet est noté $\alpha$. Soit un rayon lumineux appartenant au plan de section principale arrivant sur la face $AB$ avec un angle d'incidence $i$. Ce rayon atteint ensuite la face $BC$ avec un angle d'incidence $\theta$.

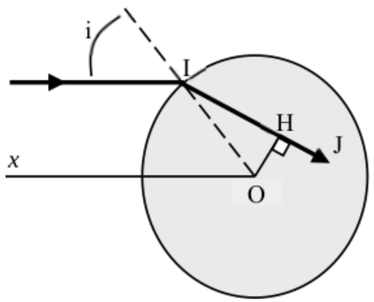
1. Exprimer la condition que doit vérifier $\theta$ pour qu'il y ait réflexion totale sur la face $BC$.
2. Après réflexion totale sur la face $BC$, le rayon lumineux émerge par la face $AC$. Exprimer la déviation totale $D$ en fonction de $i$, $i'$, $r$, $r'$ et $\theta$.
3. Donner les relations liant $r$, $r'$, $i$ et $i'$.
4. Trouver la relation liant $\theta$, $r$ et $\alpha$.
5. En déduire la déviation en fonction de $i$ et $\alpha$.
6. Le prisme est-il dispersif ?




### EX 2 – Cylindre de verre

Un cylindre de verre, de rayon $R$, d'indice $n$, baigne dans l'air d'indice 1 et reçoit des rayons lumineux parallèles à la direction $(Ox)$ normale à son axe.

1. Calculer, en fonction de l'angle d'incidence $i$, la distance $OH$ de l'axe au rayon intérieur $(IJ)$.
2. Utilisant le résultat obtenu, déterminer l'aspect que présente à un observateur très éloigné un tube cylindrique en verre de rayon extérieur $R$, d'indice $n$, percé d'un canal central de rayon $a$, contenant du mercure, l'observateur regardant dans une direction normale à l'axe du tube. Sachant que dans les deux cas : $R = 2\,\text{cm}$ et $n = 1,5$.
3. Discuter, $a$ variant de 0 à $R$. Examiner particulièrement les deux cas suivants : $a = 0,5\,\text{cm}$ et $a = 1,5\,\text{cm}$. Sachant que dans les deux cas : $R = 2\,\text{cm}$ et $n = 1,5$.



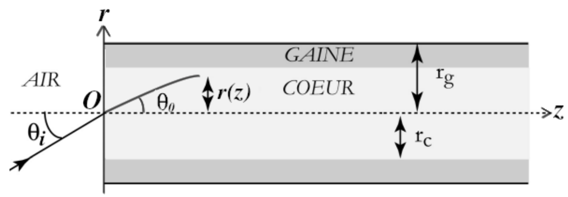

### EX 3 – Fibres optiques à gradient ou saut d'indice

Pour remédier à l'élargissement temporel des impulsions dans les fibres à saut d'indice, on a fabriqué par couches successives des fibres à gradient d'indice, dans lesquelles l'indice $n$ du cœur varie en fonction de la distance $r$ à l'axe de la fibre.

Le milieu est modélisé par un indice variant continûment selon

$$n^2(r) = n_1^2\,(1 - \alpha r^2) \text{ pour } r \leq r_c\,,$$

avec $\alpha > 0$, et $n = n(r_c) = n_2$ uniforme dans la gaine.




Un rayon incident pénètre en $O$ avec une incidence $\theta_i$ dans l'air, et $\theta_0$ dans le cœur. À l'intérieur de la fibre, on note $\theta(z) = (\widehat{\vec{u}_z ; \vec{u}})$ l'angle entre l'axe $(Oz)$ de la fibre et le vecteur unitaire directeur du rayon à la cote $z$, et $r(z)$ la distance du rayon à l'axe. Pour les valeurs numériques, on prendra $r_c = 25\,\mu\text{m}$, $n_1 = 1,50$, et l'écart relatif

$$\Delta \overset{\text{def}}{=} \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2} = \alpha\, r_c^2 = 0,02\,.$$

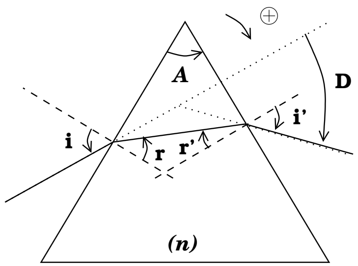
1. Établir l'équation vérifiée par $\theta(z)$, et en déduire que la trajectoire du rayon vérifie
$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2 = \left(\frac{n}{A}\right)^2 - 1 \qquad \text{avec} \qquad A = n_1 \cos\theta_0\,.$$
2. En déduire l'équation de la trajectoire du rayon, en supposant que le rayon n'atteint jamais la gaine.
3. Montrer que le rayon coupe l'axe $(Oz)$ en des points régulièrement espacés d'une distance $d$ que l'on exprimera en fonction de $r_c$, $\Delta$ et $\theta_0$. Évaluer $d$ pour $\theta_i = 8°$.
4. À quelle condition sur $\theta_i$ le rayon n'atteint-il effectivement jamais la gaine ? En déduire l'*ouverture numérique* de la fibre, définie par $\text{ON}_g = \sin\theta_{i\ell}$ où $\theta_{i\ell}$ est la valeur limite correspondante de $\theta_i$.
5. La fibre ayant une longueur $L$, déterminer une expression littérale approchée du temps de parcours $t_p$ en fonction de $\theta_i$, sachant que $L\sqrt{\alpha} \gg 1$.
6. En déduire l'expression de l'étalement temporel $\Delta t_g$ d'une impulsion lumineuse en faisceau conique convergent au point $O$, de demi angle au sommet maximal $\theta_{i\ell}$. Exprimer $\Delta t_g$ en fonction de $c$ (célérité dans le vide), $L$, $n_1$ et $n_2$.
7. On souhaite comparer le résultat précédent avec celui qu'on obtiendrait pour une fibre à saut d'indice de mêmes dimensions, et mêmes indices cette fois uniformes, $n_1$ dans le cœur et $n_2$ dans la gaine. Retrouver l'expression de l'ouverture numérique $\text{ON}_s$ et de l'étalement temporel maximal $\Delta t_s$ pour cette fibre en fonction des mêmes données. Montrer que $\Delta t_g < \Delta t_s$. Évaluer numériquement le rapport.
8. En déduire la limite supérieure de bande passante en Go.s$^{-1}$ (1 o =1 octet = 8 bits) pour $L = 10\,\text{m}$ pour chacune des deux fibres cas. Conclure.

## EX 4 – Conjugaison par une lame à faces parallèles

Un passant regarde un tableau situé derrière une vitrine assimilée à une lame à faces parallèles d'épaisseur $e = 2,1\,\text{cm}$ et d'indice $n = 1,5$. Quelle est la distance entre l'objet visé et son image, lorsque la direction de visée est orthogonale à la vitrine ?

## EX 5 – Spectroscopie à prisme

Soit un prisme d'angle au sommet $A$ et fabriqué dans un verre d'indice $n$. Il est placé dans l'air dont l'indice peut être assimilé à 1. On étudie la trajectoire des rayons lumineux incidents appartenant au plan de section droite $(P)$ du prisme (également appelé plan de section principale).




**1.** Justifier que le rayon reste dans le plan $(P)$ après réfraction en $I$ puis éventuellement en $I'$. Donner les relations liant $i$ et $r$ ; $i'$ et $r'$ et $r$, $r'$ et $A$.

**2.** ***Déviation.*** Définir et exprimer la déviation $D$ en fonction de $i$, $i'$ et $A$ dans le cas où le rayon émergent existe.

**3.** ***Rayon émergent.*** En supposant l'existence de ce dernier, comment varie $i'$ lorsque l'on fait décroître $i$ ? Justifier alors que si pour $i = -\frac{\pi}{2}$ (incidence rasante), on n'observe pas de rayon émergent, alors il n'y en aura pas quelle que soit la valeur de $i$. En déduire la valeur maximale $A_M$ de $A$ au delà de laquelle il n'y aura aucun rayon émergent quel que soit l'angle d'incidence $i$. Calculer $A_M$ pour $n = 1,50$.
*On suppose dans la suite que $A < A_M$.*

**4.** ***Intervalle d'incidences utile.*** Montrer que si $i$ croît de $-\frac{\pi}{2}$ à une valeur $i_0$ que l'on déterminera, $i'$ varie de $i'_0$ à $\frac{\pi}{2}$ (émergence rasante) et justifier que $i_0 = -i'_0$. Calculer $i$ pour $n = 1,50$ et $A = 60°$. Montrer que pour $A < A_m$, $i_0$ devient positif. Calculer $A_m$ pour $n = 1,5$.

**5.** ***Déviation minimale.*** Pour $n = 1,5$ et $A = 60°$, tracer les courbes $i'(i)$ et $D(i)$ en utilisant Python. *On constate que la courbe $D(i)$ passe par un minimum de coordonnées $i_m$ et $D_m$.*
Jusfifier que $i'_m = i'(i_m) = -i_m$, et en déduire $r'_m$, $i'_m$ et $D_m$ en fonction de $A$ et $n$. Pour $n = 1,5$ et $A = 60°$, calculer $D_m$ et $i_m$.

L'indice du verre est donné en fonction de la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0$ (en $\mu$m) par la formule de Cauchy

$$n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

où $A = 1,532$ et $B = 0,042\,\mu\text{m}^2$. On utilise une lumière incidente polychromatique. On définit la *dispersion angulaire* du prisme par

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\lambda_0} = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}n}\,\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}$$

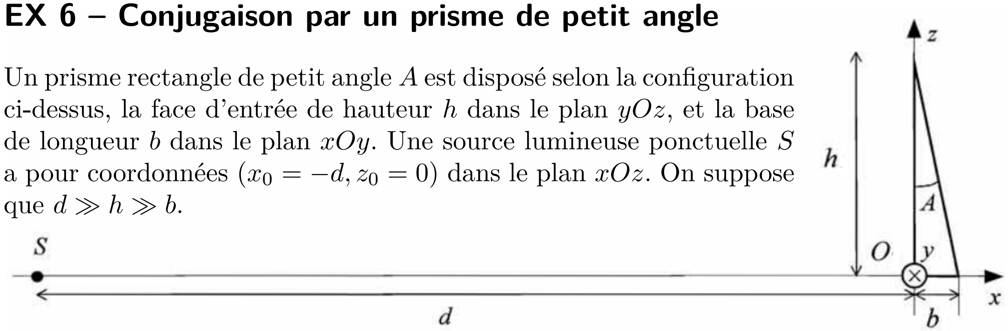
où $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}$ est le *pouvoir dispersif* du verre. Lors de l'expérience le prisme est réglé au minimum de déviation.

**6.** Exprimer sa dispersion angulaire, puis la calculer pour $A = 54°$, au voisinage de $\lambda_0 = 0,585\,\mu$m. En déduire la variation $\Delta D$ correspondant à deux raies de longueur d'onde $0,580\,\mu$m et $0,590\,\mu$m.

À l'aide d'une source monochromatique, on utilise un prisme d'angle $A = 60°$ immergé successivement dans l'air puis dans un liquide, milieux dans lesquels on mesure les angles de déviation minimale respectifs $i'_{m\,a} = 52,88°$ et $i'_{m\,\ell} = 6,46°$. En déduire l'indice de réfraction du prisme et celui du liquide.

## EX 6 – Conjugaison par un prisme de petit angle

Un prisme rectangle de petit angle $A$ est disposé selon la configuration ci-dessus, la face d'entrée de hauteur $h$ dans le plan $yOz$, et la base de longueur $b$ dans le plan $xOy$. Une source lumineuse ponctuelle $S$ a pour coordonnées $(x_0 = -d, z_0 = 0)$ dans le plan $xOz$. On suppose que $d \gg h \gg b$.




**1.** Après avoir redéfini les angles intervenant dans la réfraction d'un rayon quelconque d'incidence $i$, et les relations qui les lient, montrer que dans l'approximation des petits angles, la déviation en valeur absolue vérifie $|D| = (n-1)A$.

**2.** En déduire sous cette même approximation la position $(x'_0, z'_0)$ de l'image $S'$ de $S$.

# *Lentilles minces*

## EX 7 – Lentille achromatique

La vergence d'une lentille mince d'indice $n$ délimitée par deux dioptres sphériques de rayons de courbure $R_1 = \overline{S_1C_1}$ et $R_2 = \overline{S_2C_2}$ s'écrit [1]

$$V = \frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Une lentille est taillée dans un verre d'indice $n$ dépendant de la longueur d'onde. Ce verre vérifie la loi de Cauchy : $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$. On note $\lambda_{0F}$, $\lambda_{0D}$, et $\lambda_{0C}$ les longueurs d'onde respectives de la raie bleue de l'hydrogène (486 nm), de la raie orange du Sodium (589 nm) et de la raie rouge de l'Hydrogène (656 nm), et $n_F = 1,585$, $n_D = 1,575$, et $n_C = 1,571$ les indices correspondant. La vergence de la lentille pour la raie orange du Sodium, est $V = 0,5\,\delta$ et son diamètre est $d = 20\,\text{cm}$.

1. $S$ est le sommet du dioptre (intersection avec l'axe optique) et $C$ est son centre de courbure.

1. Calculer la vergence de la lentille pour les raies $F$ et $C$ de l'Hydrogène.
2. Quel est le diamètre de la tache lumineuse sur un écran placé à 2 m de la lentille, si elle est éclairée uniformément par des rayons parallèles de longueur d'onde $\lambda_F$ ou $\lambda_C$ ?

Les aberrations chromatiques de cette lentille la rendent impropre à une utilisation comme objectif d'une lunette astronomique. Pour réaliser une lentille de même vergence et ne possédant pas ce défaut, on accole deux lentilles dont l'une est taillée dans le verre précédent, et l'autre dans un verre différent défini par $n'_F = 1,664$, $n'_D = 1,650$, $n'_C = 1,644$.

3. Déterminer la vergence des deux lentilles.
4. Sachant que la première lentille est équiconvexe et que la face d'entrée de la deuxième lentille épouse la forme de la face de sortie de la première, calculer le rayon de courbure des différentes faces.

## EX 8 – Focométrie

Dans les méthodes ci-dessous, on note $f'$ la distance focale de la lentille mince $\mathcal{L}$ étudiée et $O$ son centre optique, $A$ un point objet situé sur l'axe optique et $A'$ son image[2].

1. ***Autocollimation.*** On accole une lentille mince convergente et un miroir plan. On crée un petit objet réel transverse au voisinage de l'axe optique. Lorsqu'il est situé est à $0,1\,\text{m}$ du dispositif, l'image se forme dans le plan de l'objet. En déduire la distance focale de la lentille. Justifier par le calcul.
2. ***Méthode de Silberman.*** On recherche une situation telle que le grandissement transversal soit égal à $-1$. Montrer qu'il n'existe qu'une seule possibilité et qu'alors $\overline{AA'} = 4f'$. Représenter la situation par une construction dans chaque cas : lentille convergente ou divergente. Comment opérer dans ce dernier cas ?
3. ***Méthode de Bessel.*** La lentille est convergente, et l'objet $A$ est réel et situé à une distance $D$ de l'écran. Montrer par une explication simple sans calcul qu'il existe deux positions de la lentille permettant de conjuguer $A$ avec l'écran. On note $d$ la distance entre ces deux positions. Montrer que $f' = \frac{D^2-d^2}{4D}$. Quel lien y a-t-il avec la méthode de Silberman ? La méthode est-elle transposable aux lentilles divergentes ? Si oui comment ?
4. ***Méthode de Badal.*** On dispose de deux lentilles minces convergentes connues $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ de distances focales respectives $f'_1$ et $f'_2$. On place $\mathcal{L}_2$ en arrière de $\mathcal{L}_1$ à une distance supérieure à $f'_2$. On place un objet $A$ en $F_1$ et on localise son image par le doublet à l'aide d'un écran. Puis on ajoute $\mathcal{L}$ (inconnue) en $F_2$ et on déplace l'écran d'une distance algébrique $d$ pour retrouver l'image par le système complet. Montrer que $f' = -\frac{f_2'^2}{d}$. La méthode est-elle applicable indifféremment pour une lentille divergente ou convergente ? Comment doit-on procéder si $0 < f' < f'_2$ ?

2. On rappelle qu'en raison de la symétrie sphérique de la lentille, $A'$ est aussi nécessairement situé sur l'axe optique.

# Instruments de projection

## EX 9 – Projection du Soleil sur un écran

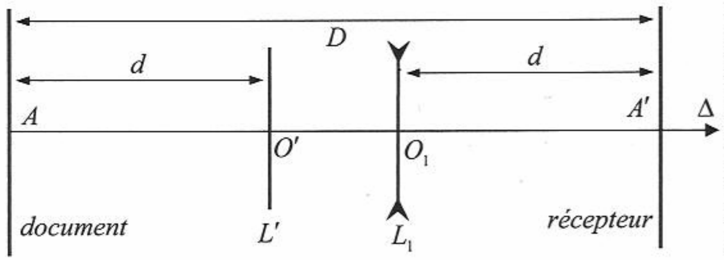
L'axe d'une lentille $\mathcal{L}_1$ (centre $O_1$, vergence $V_1 = 2\,\delta$) est dirigé vers le soleil. Un écran $\mathcal{E}$ est placé à 1,25 m de $\mathcal{L}_1$ et une lentille divergente $\mathcal{L}_2$ (focale $f'_2$) est placée entre $O_1$ et $\mathcal{E}$. On donne $O_1O_2 = 0,25\,\text{m}$.

1. Calculer $f'_2$ pour que l'image du soleil soit nette.
2. Le diamètre apparent du soleil est $\alpha = 0,01\,\text{rad}$. Déterminer le diamètre de l'image sur l'écran.

## EX 10 – Objectif de photocopieur

Un objectif de photocopieur permet la formation de l'image d'un document sur une surface photosensible. La reproduction du document, qui est au format A4, peut être faite dans le même format ou dans un format A3 (surface double) ou dans un format A5 (surface moitié). Ces réglages se font en modifiant les positions respectives des lentilles à l'intérieur de l'objectif. Les lentilles sont considérées minces, et fonctionnent dans les conditions de Gauss.
La distance document-récepteur est $D = 384\,\text{mm}$. On place une première lentille mince divergente $L_1$, de distance focale image $f'_1 = -90\,\text{mm}$, à $d = 180\,\text{mm}$ du récepteur.

1. En quoi consistent les conditions de Gauss ? À quelles propriétés conduisent-elles ?
2. La lentille $L_1$ peut-elle donner une image du document sur le récepteur ? Justifier par une construction, puis par un calcul.
3. On ajoute alors une lentille mince $L'$ devant la lentille $L_1$ à $d = 180\,\text{mm}$ du document.



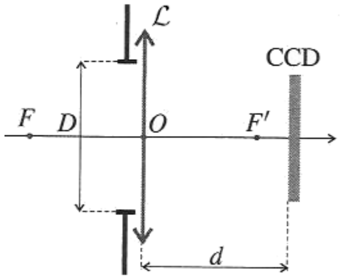

   a) La lentille $L'$ peut-elle être divergente ? Justifier simplement.
   b) Quelle doit être la distance focale image $f'$ de la lentille $L'$ pour obtenir une image réelle du document sur le récepteur ?
   c) En déduire le grandissement $\gamma_1$ de l'association des deux lentilles et indiquer le type de tirage réalisé : A4 en A3, ou A4 en A5.

4. En fait la lentille $L'$ est constituée de deux lentilles accolées $L_2$ et $L_3$, $L_2$ étant identique à $L_1$. Calculer la distance focale image $f'_3$ de $L_3$. Quelle est la nature de $L_3$ ?

5. On glisse alors la lentille $L_3$ afin de l'accoler à $L_1$. Montrer que l'image du document reste sur le récepteur et calculer le grandissement $\gamma_2$ correspondant à cette nouvelle association. En déduire le type de tirage obtenu.

## EX 11 – Appareil photo

On assimile l'objectif d'un appareil photographique à une lentille mince convergente $\mathcal{L}$ de centre $O$ et de distance focale image $f'$. La distance $d$ entre $\mathcal{L}$ et l'écran $E$ constitué par la pellicule sensible (*film*) ou le capteur CCD est variable, ce qui permet d'effectuer la mise-au-point. Le faisceau entrant dans la lentille est limité par un diaphragme circulaire $\mathcal{D}$ dont le diamètre $D$ est variable afin d'ajuster la quantité d'énergie lumineuse captée.




On définit le « nombre d'ouverture » $N = \frac{f'}{D}$ où $D$ est le diamètre du diaphragme d'ouverture de l'objectif, qui est réglable.

1. On s'intéresse à la mise-au-point de l'objectif. On désire photographier des objets dont la distance à $\mathcal{L}$ varie de $x$ à l'infini. Dans quel domaine doit varier $d$ ? Calculer numériquement les valeurs extrêmes pour $x = 60\,\text{cm}$ et $f' = 50\,\text{mm}$.
2. Les valeurs usuelles de $N$ proposées sont : 1,8 ; 2,8 ; 4 ; 5,6 ; 8 ; 11 ; 16 ; 22. Par ailleurs les durées d'exposition $\tau_e$ (ou « vitesses d'obturation ») usuellement proposées sont (en secondes) : $\frac{1}{1000}$; $\frac{1}{500}$; $\frac{1}{250}$; $\frac{1}{60}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2. Expliquer le lien existant entre ces deux suites de nombres.
3. ***Notion de profondeur de champ.*** L'objectif est mis au point à l'infini. À tout point de l'axe correspond alors sur la pellicule une tache. Compte tenu de la taille finie $\delta$ du grain de la pellicule ou du pixel du capteur CCD, il y a netteté apparente si le diamètre de cette tache est inférieur ou égal à $\delta$. On note $A_0$ le point de l'axe le plus proche de l'objectif pour lequel ce critère de netteté apparente est satisfait.
   a) Faire un schéma représentant le point $A_0$ et son image $A'_0$, ainsi $D$ et $\delta$.
   b) Calculer la distance $p_0$ du point $A_0$ à l'objectif en fonction de $N$, $f'$ et $\delta$. Comment modifier $D$ pour augmenter la profondeur de champ ?
   c) On donne $\delta = 30\,\mu\text{m}$. Calculer $p_0$ pour $N = 2,8$ et pour $N = 16$.
   d) Le photographe désire diminuer la profondeur de champ tout en conservant la même exposition à sa photographie. Comment doit-il opérer ?
4. ***Effet de la diffraction.*** La tache centrale de diffraction donnée par une ouverture circulaire de diamètre $D$ (aussi appelée *tache d'Airy*) a pour rayon angulaire : $\alpha = \frac{1{,}22\lambda}{D}$.
   a) Quelle condition doit respecter le nombre d'ouverture de l'objectif de 50 mm de focale pour que la netteté ne soit pas limitée par la diffraction ?
   b) Faire l'application numérique pour $\delta = 30\,\mu\text{m}$ et $\delta = 10\,\mu\text{m}$ et (on prendra $\lambda = 0,6\,\mu\text{m}$). Conclusion ?

# *Instruments oculaires*

## EX 12 – L'œil et la loupe

Dans les questions suivantes, on assimile l'œil à une lentille mince immergée dans l'air de part et d'autre, de distance focale variable $f'_o$, associée à une rétine située à une distance $d_R = 15\,\text{mm}$.

1. ***La myopie.*** Un œil myope a son foyer image situé à 14,78 mm du centre optique quand il est au repos, et a 13,04 mm quand il accommode au maximum. Calculer la vergence du verre correcteur qui, placé à 2 cm du centre optique, amène le PR à l'infini. Trouver alors la nouvelle position de son PP.
2. ***L'hypermétropie.*** Un œil hypermétrope a son foyer image situé à 1 mm derrière la rétine lorsqu'il est au repos. Quand il accommode à fond, sa vergence est égale à 76,67 $\delta$. Trouver les positions de son PR et de son PP. Calculer la vergence du verre correcteur qui, placé à 2 cm du centre optique, amène le PR à l'infini.
3. ***Latitude de mise au point.*** Un observateur utilise une loupe en la plaçant de manière à ce que son foyer image $F'$ ($f' = 10\,\text{cm}$) soit confondu avec le centre optique $O$ de l'œil.
   a) L'œil étant normal ($d_m = 25\,\text{cm}$), calculer la latitude de mise au point. Montrer graphiquement que tous les objets situés dans la latitude de mise au point donneront des images qui seront vues sous le même diamètre angulaire. Quel est l'avantage de ce type d'observation ?
   b) Rappeler l'ordre de grandeur de la limite de résolution angulaire de l'œil humain et en déduire la dimension plus petits détails de l'objet discernables à l'aide de la loupe.

## EX 13 – Oculaires

On s'intéresse à des oculaires constitués d'un doublet de lentilles $\{\mathcal{L}_1; \mathcal{L}_2\}$ espacées d'une distance $e = \overline{O_1O_2}$, de distances focales respectives $f'_1$ et $f'_2$, que l'on caractérise par le triplet $(m, n, p)$ :

$$\frac{f'_1}{m} = \frac{e}{n} = \frac{f'_2}{p} = a$$

On étudie successivement l'oculaire de Huygens $(3, 2, 1)$ puis l'oculaire de Ramsden $(3, 2, 3)$.

1. Représenter chacun des deux doublets en prenant $a = 2\,\text{cm}$.
2. Déterminer la position du foyer objet et du foyer image pour chacun des deux doublets, d'abord par construction puis par le calcul.
3. Peut-on utiliser indifféremment ces deux oculaires comme loupe ?